



نام درس: روش‌های اندازه‌گیری پیشرفته – ابزارهای اندازه‌گیری و مشخصات کارایی (۲)

جلسه سوم

نام استاد: علی چائی بخش لنگرودی



مشخصات دینامیکی ابزارها

🌈 مشخصات دینامیکی یک ابزار اندازه‌گیری بیانگر رفتار آن ابزار از زمان ایجاد تغییر در یک کمیت اندازه‌گیری تا زمان رسیدن خروجی دستگاه به یک مقدار ثابت است.





مشخصات دینامیکی ابزارها

■ در هر سیستم خطی و نامتغیر با زمان، از رسته n

$$a_n \frac{d^n q_o}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} q_o}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dq_o}{dt} + a_0 q_o =$$
$$b_m \frac{d^m q_i}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} q_i}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{dq_i}{dt} + b_0 q_i,$$

■ که در آن q_i ها مقدار اندازه گیری شده، q_o خروجی و $a_0 \dots a_n$ ، $b_0 \dots b_m$ ثابت ها می باشند



مشخصات دینامیکی ابزارها

ابزارهای رسته صفر (Zero-order type) 

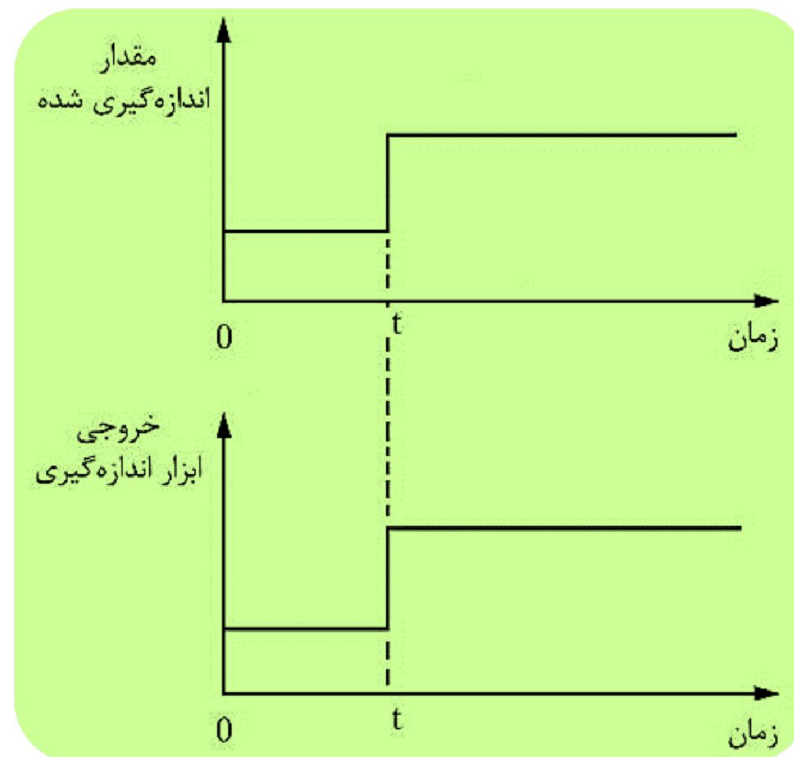
❖ اگر تمامی ضرایب $a_1 \dots a_n$ به غیر از a_0 صفر در نظر گرفته شوند، آنگاه

$$a_0 q_0 = b_0 q_i \quad \text{or} \quad q_0 = \frac{b_0 q_i}{a_0} = K q_i$$

❖ که در آن ثابت K ، حساسیت ابزار می باشد

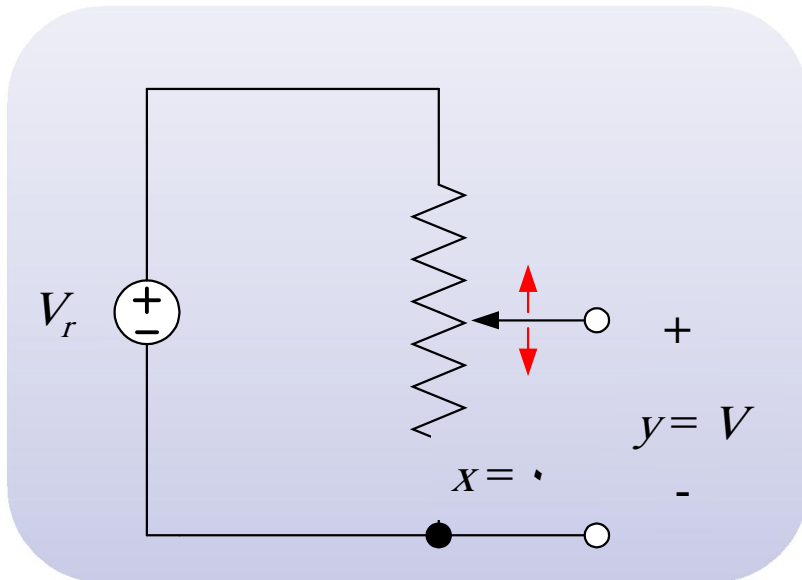
مشخصات دینامیکی ابزارها

با تغییر در مقدار اندازه گیری شده در زمان t ، خروجی دستگاه به سرعت به مقدار جدیدی در همان لحظه زمانی t تغییر خواهد کرد.



مشخصات دینامیکی ابزارها

پتانسیومتر (Potentiometer) مثال خوبی از چنین دستگاهی بوده به صورتی که با تغییر مکان لغزنده، ولتاژ خروجی بلادرنگ تغییر خواهد کرد.



$$V = V_r \cdot \frac{x}{x_m} \quad \text{here, } K = V_r / x_m$$

Where $0 \leq x \leq x_m$ and V_r is a reference voltage

مشخصات دینامیکی ابزارها

ابزارهای رسته اول (First-order instrument)

اگر تمامی ضرایب بجز a_0 و a_1 ، صفر در نظر گرفته شوند، آنگاه 

$$a_1 \frac{dq_0}{dt} + a_0 q_0 = b_0 q_i$$

d/dt با اپراتور مشتق D جایگزین و پس از بازآرایی 

$$q_0 = \frac{\left(\frac{b_0}{a_0}\right) q_i}{\left[1 + \left(\frac{a_1}{a_0}\right) D\right]}$$

مشخصات دینامیکی ابزارها

○ با تعریف

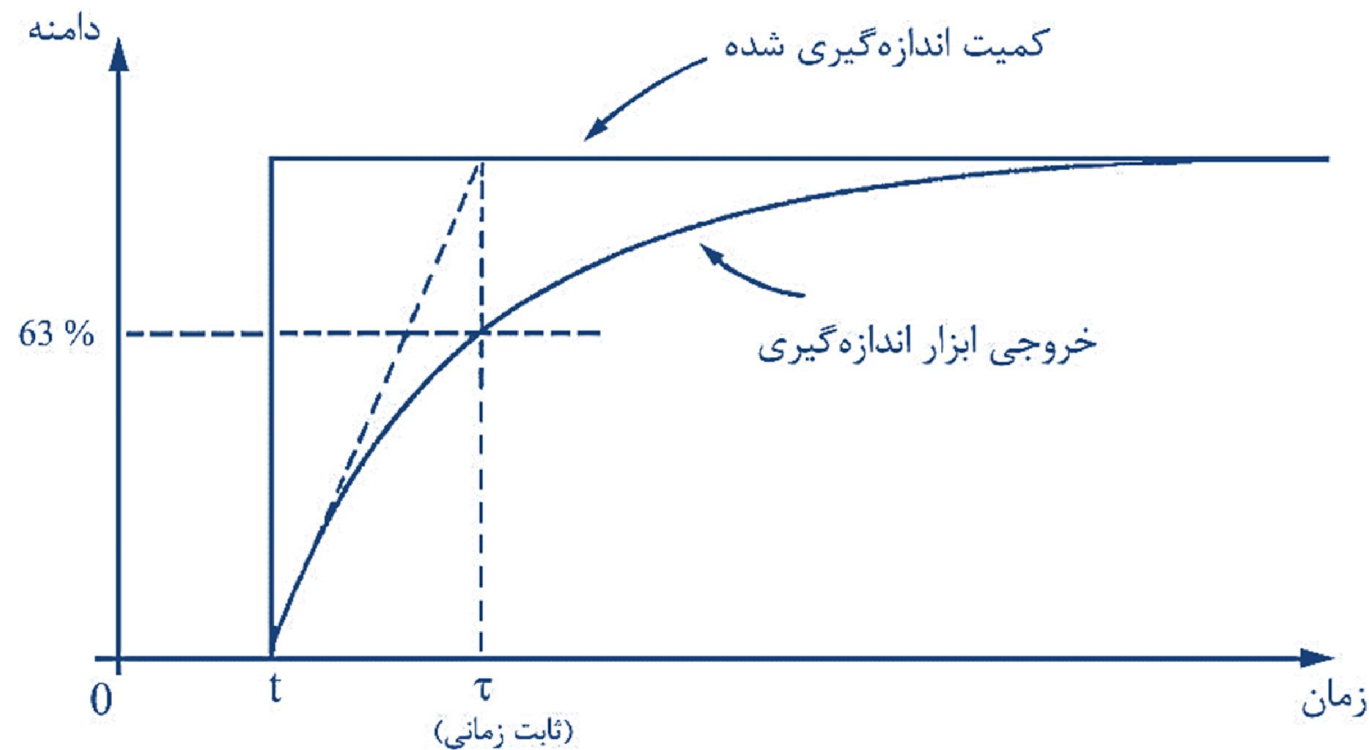
◀ $K = b_0/a_0$ به عنوان حساسیت استاتیکی

◀ $\tau = a_1/a_0$ به عنوان ثابت زمانی سیستم

$$q_0 = \frac{K q_i}{1 + \tau D}.$$

مشخصات دینامیکی ابزارها

● پاسخ پله ابزارهای اندازه گیری رسته اول





مشخصات دینامیکی ابزارها

○ شمار زیادی از ابزارهای اندازه گیری از نوع رسته اول هستند.

○ این نکته بخصوص در سیستم های کنترلی به دلیل وجود تاخیر مابین تغییر در مقدار کیمت اندازه گیری شده و مقدار نشان داده شده در خروجی ابزار اندازه گیری، بسیار مهم است.

○ ثابت زمانی بسیاری از ابزارهای رسته اول نسبت به دینامیک فرآیند مورد نظر بسیار کوچک است.

مشخصات دینامیکی ابزارها

پاسخ پله ابزارهای اندازه گیری رسته اول 

$$\tau \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = KA U(t)$$



$$y(t) = Ce^{-t/\tau} + KA$$

پاسخ حالت ماندگار پاسخ حالت گذرا

با اعمال شرایط اولیه

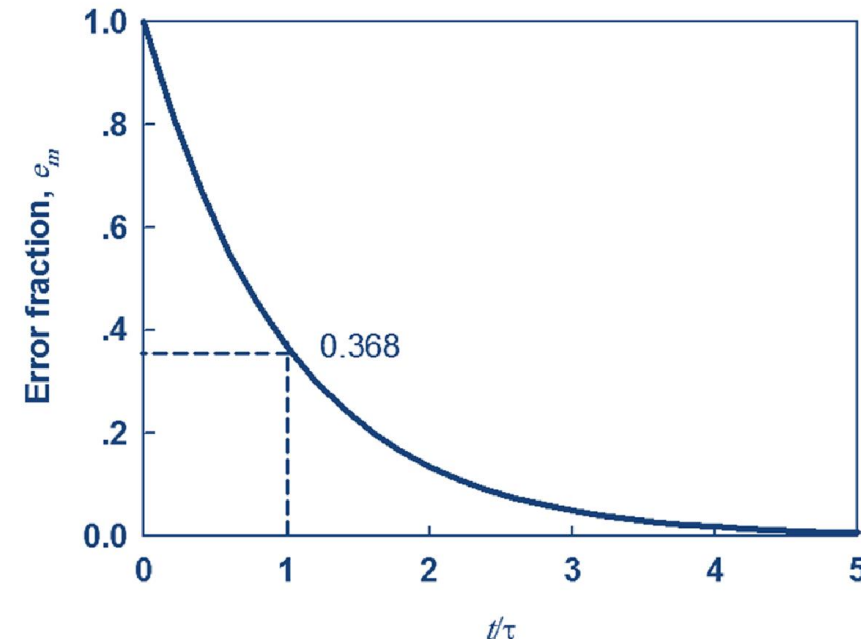
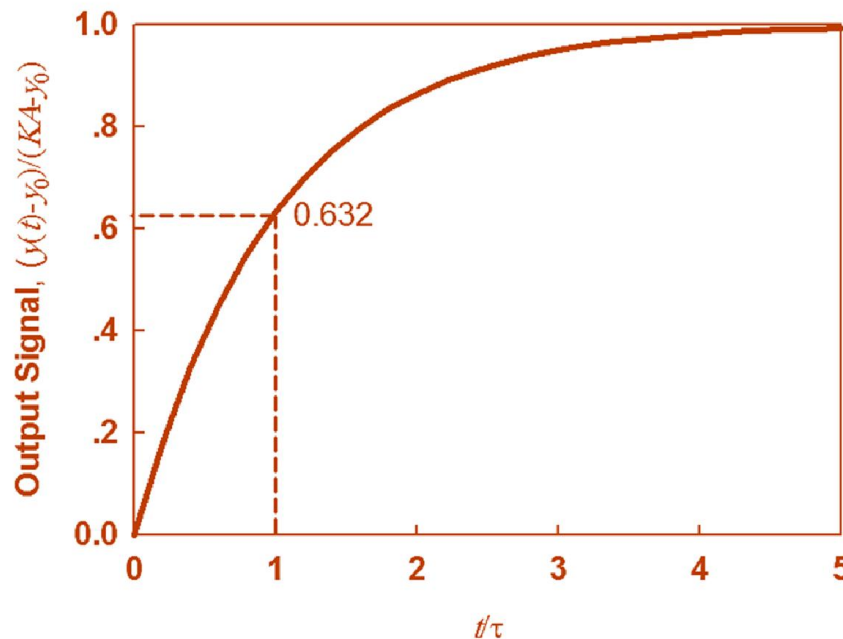
$$C = y_0 - KA,$$

$$y(t) = KA + (y_0 - KA)e^{-\frac{t}{\tau}}$$

مشخصات دینامیکی ابزارها

پاسخ پله ابزارهای اندازه‌گیری رسته اول 

error fraction:
$$e_m(t) = \frac{y(t) - KA}{y_0 - KA} = \frac{y(t) - y(\infty)}{y(0) - y(\infty)} = e^{-\frac{t}{\tau}}$$

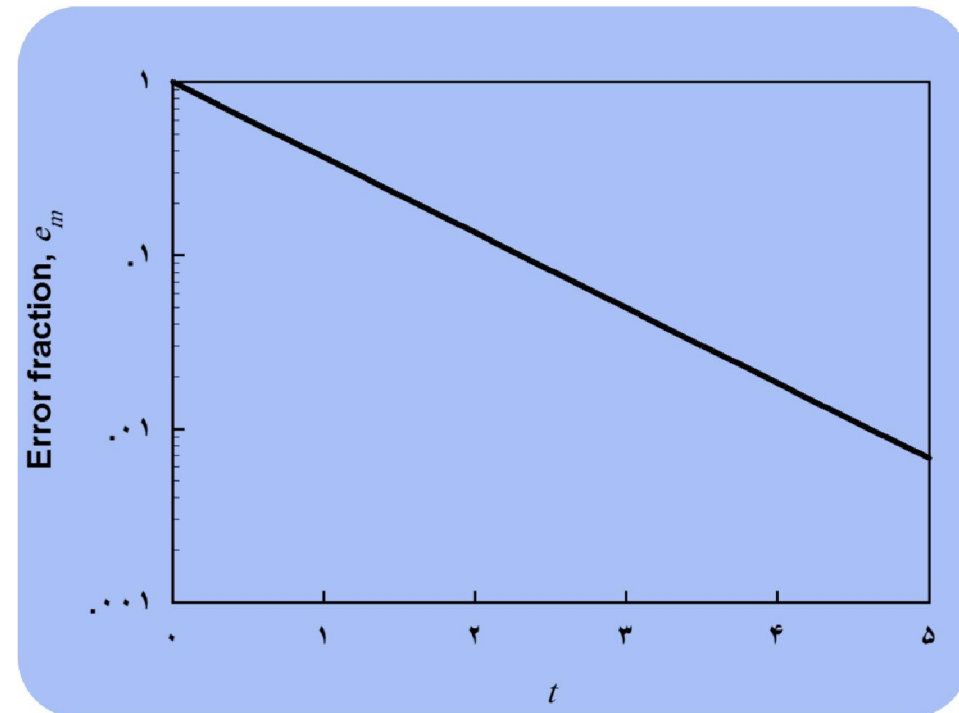


مشخصات دینامیکی ابزارها

✚ تعیین ثابت زمانی ابزار رسته اول

$$e_m = \frac{y(t) - KA}{y(0) - KA} = e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$\ln e_m = 2.3 \log e_m = -\frac{t}{\tau}$$



مشخصات دینامیکی ابزارها

پاسخ شیب ابزارهای اندازه گیری رسته اول



$$y = \frac{K}{\tau s + 1} \frac{1}{s^2}$$

با اعمال شرایط اولیه

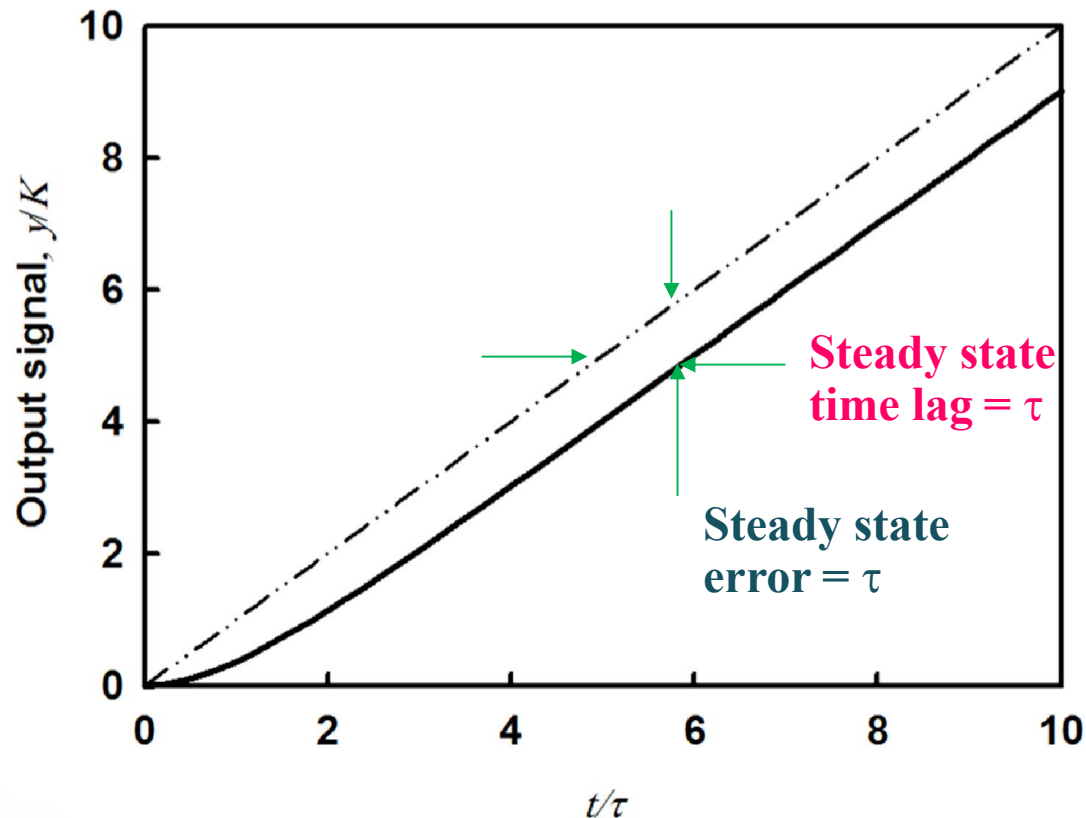
$$y(t) = K(t - \tau + \tau e^{-\frac{t}{\tau}})$$

خطای اندازه گیری

$$e_m(t) = u - \frac{y}{K} = \tau(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

مشخصات دینامیکی ابزارها

پاسخ شیب بدون بعد ابزار اندازه گیری رسته اول



پاسخ زمانی به اندازه τ از ورودی
خروجی واقعی عقب خواهند ماند



مشخصات دینامیکی ابزارها

پاسخ فرکانسی ابزار اندازه گیری رسته اول

$$q_0 = \frac{K}{\tau s + 1} q_i \quad \rightarrow \quad \frac{q_0}{q_i}(j\omega) = \frac{K}{\underbrace{\sqrt{\omega^2 \tau^2 + 1}}_{|G(j\omega)|}} < \underbrace{\tan^{-1}(-\omega\tau)}_{< G(j\omega)}$$

همچنین پاسخ فرکانسی به صورت زیر بدست خواهد آمد:

$$q_i = X \cdot \sin(\omega t)$$

$$q_{oss}(t) = \frac{X \cdot K}{\sqrt{\omega^2 \tau^2 + 1}} \sin(\omega t - \tan^{-1}(\omega\tau))$$

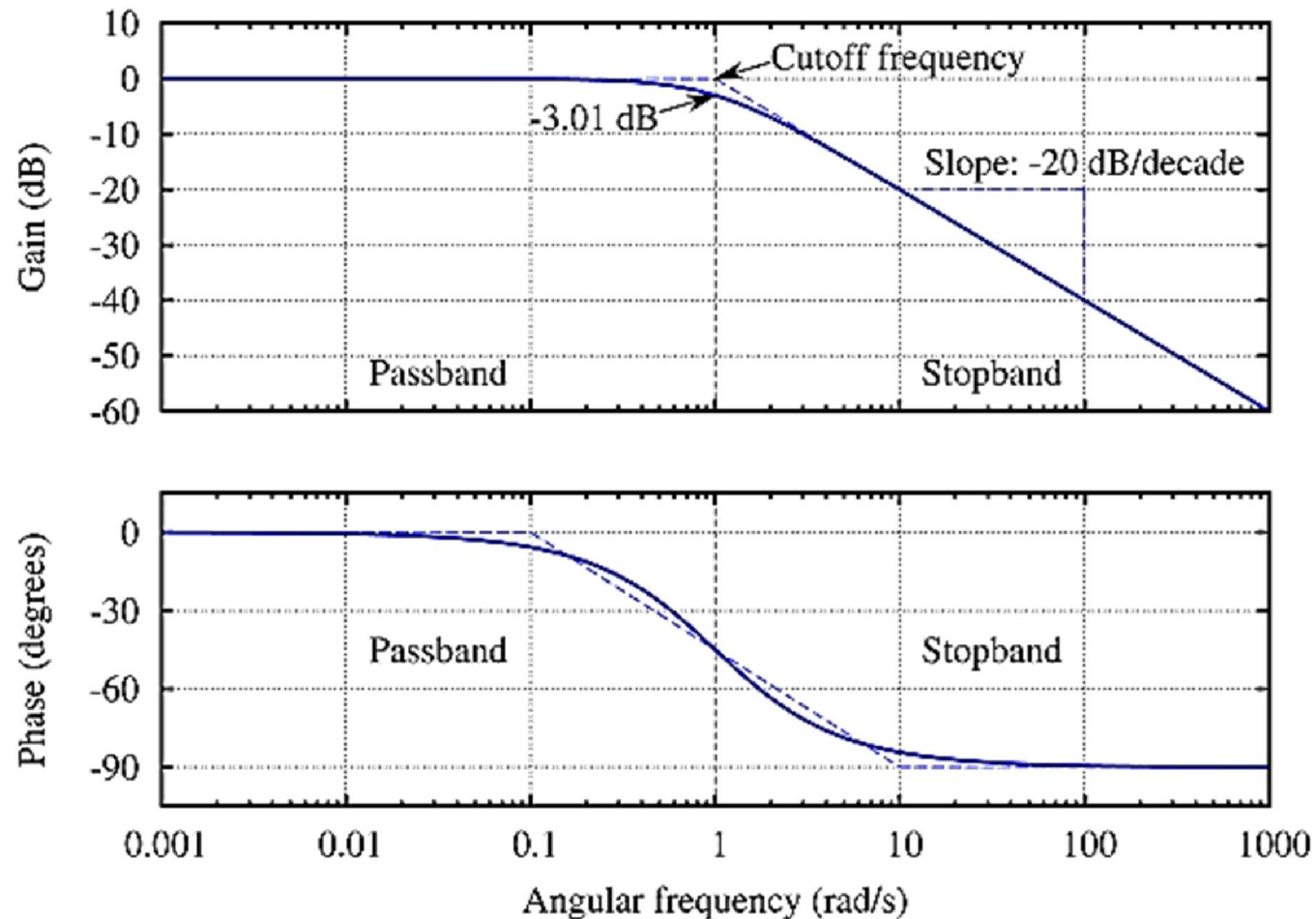
مشخصات دینامیکی ابزارها

پاسخ فرکانسی ابزار اندازه گیری رسته اول



- ❖ $\omega \rightarrow 0, |G| = K, \text{ and } \Phi = 0$
- ❖ $\omega \rightarrow \infty, |G| = \frac{K}{\tau \cdot \omega}, \text{ and } \Phi = \tan^{-1}(-\infty) = -90^\circ$
- ❖ $\omega = \frac{1}{\tau}, |G| = \frac{K}{\sqrt{2}}, \text{ and } \Phi = \tan^{-1}(-1) = -45^\circ$

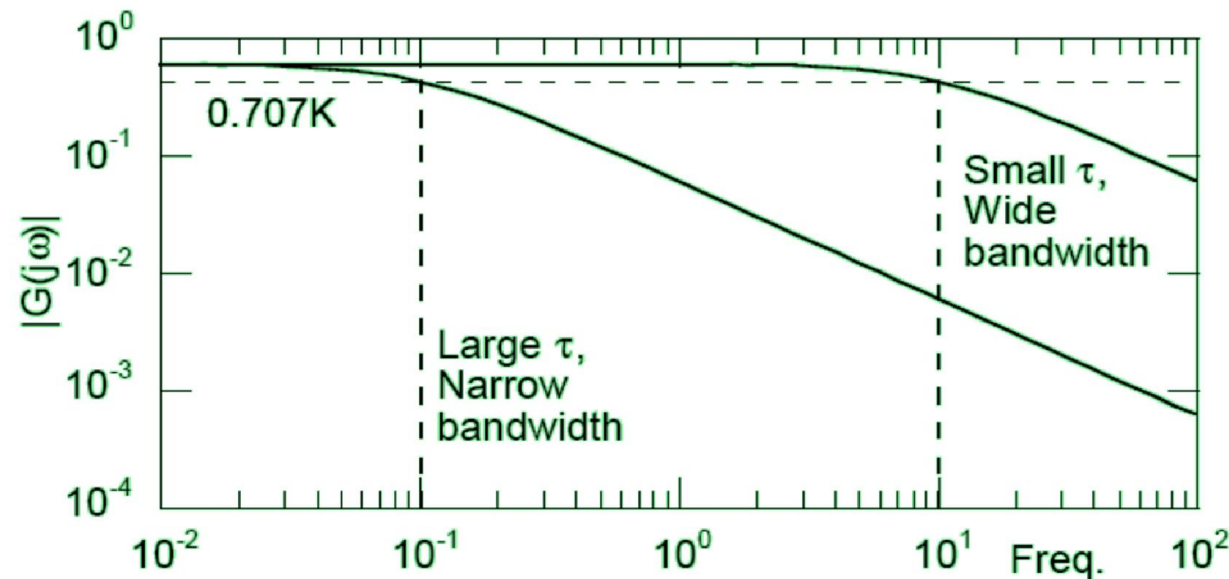
مشخصات دینامیکی ابزارها



مشخصات دینامیکی ابزارها

◀ **پهنای باند:** باند فرکانسی که مقدار دامنه حداکثر $M(\omega) \geq 0.707$ باشد (بر حسب واحد دسی بل بزرگتر از -3 dB).

◀ **فرکانس قطع:** فرکانسی که در آن دامنه پاسخ سیستم به کمتر از 0.707 (-3 dB) فرکانس پایین پایدار کاهش یابد.



مشخصات دینامیکی ابزارها

مثال ۱-۳: به یک سیستم رسته اول با ثابت زمانی τ برابر با 0.2 ثانیه و حساسیت استاتیکی K ، ورودی اندازه گیری فرکانسی به صورت زیر اعمال می شود،

$$x(t) = \sin 2t + 0.3 \sin 20t$$

پاسخ سیستم به صورت زیر خواهد بود

► For $\omega = 2 \frac{rad}{s}$:

$$x_1 \left(2 \frac{rad}{s} \right) = \frac{K}{\sqrt{0.16 + 1}} \angle -21.8^\circ = 0.93K \angle -21.8^\circ$$

► For $\omega = 20 \frac{rad}{s}$:

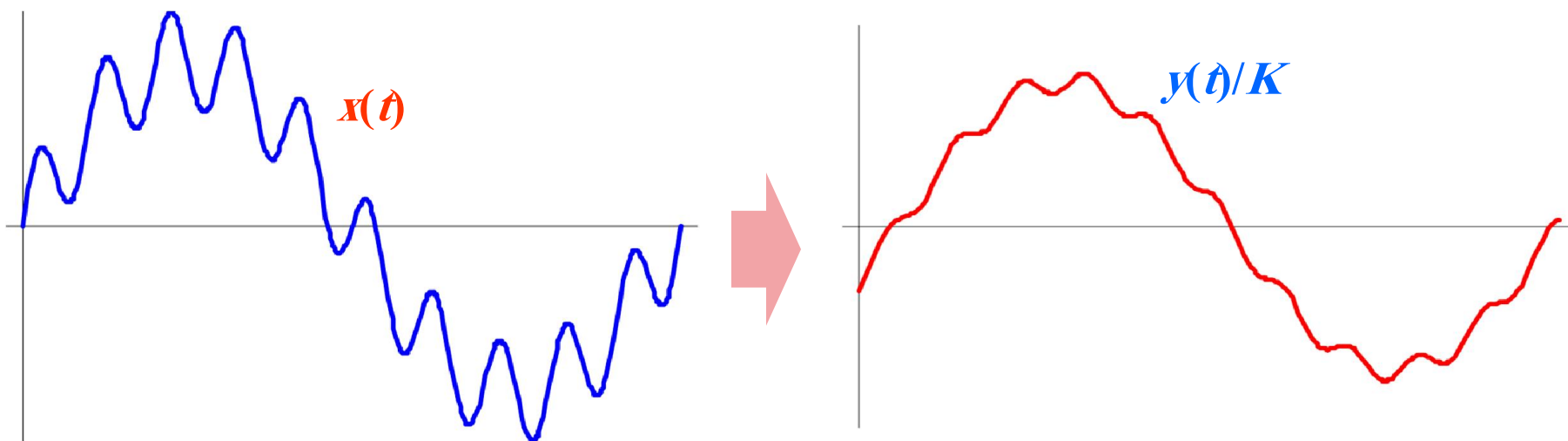
$$x_2 \left(20 \frac{rad}{s} \right) = \frac{K}{\sqrt{16 + 1}} \angle -76^\circ = 0.24K \angle -76^\circ$$

مشخصات دینامیکی ابزارها

■ بنابراین خروجی $y(t)$ به صورت زیر بدست می‌آید

$$y(t) = (1)(0.93K) \sin(2t - 21.8^\circ) + (0.3)(0.24K) \sin(20t - 76^\circ)$$

$$y(t) = (0.93K) \sin(2t - 21.8^\circ) + (0.072K) \sin(20t - 76^\circ)$$





مشخصات دینامیکی ابزارها

○ مثال ۲-۳: یک ابزار رسته اول برای اندازه گیری یک سیگنال با فرکانس نهایی ۱۰۰ Hz با عدم صحت ۵٪ مورد استفاده قرار می گیرد. حداکثر ثابت زمانی مجاز آن چقدر است؟

$$\left| \frac{Q_0(i\omega)}{Q_i(i\omega)} \right| = M(\omega) = \frac{K}{\sqrt{\omega^2 \tau^2 + 1}}$$

$$\text{Dynamic error} = \frac{M(\omega) - M(0)}{M(0)} \times 100\% = \left(\frac{1}{\sqrt{\omega^2 \tau^2 + 1}} - 1 \right) \times 100\%$$

مشخصات دینامیکی ابزارها

برای شرایطی که $|\text{Dynamic error}| < 5\%$ باشد داریم:

$$0.95 \leq \frac{1}{\sqrt{\omega^2 \tau^2 + 1}} \leq 1.05$$

ولی دامنه سیستم رسته

$\frac{1}{\sqrt{\omega^2 \tau^2 + 1}}$ can not be greater than 1

در نتیجه

$$0 \leq \omega \tau \leq 0.33$$

مشخصات دینامیکی ابزارها

بنابراین بالاترین ثابت زمانی در فرکانس ۱۰۰ Hz برابر است با:

$$\tau = \frac{0.33}{2\pi 100 \text{ Hz}} = 0.52 \text{ ms}$$

در این فرکانس، تغییر زوایه فاز :

$$\phi = -18.19^\circ \text{ at } 100 \text{ Hz}$$

مشخصات دینامیکی ابزارها

ابزارهای رسته دوم (Second-order instrument)



اگر تمامی ضرایب به غیر از a_0 ، a_1 و a_2 برابر با صفر در نظر گرفته شود،

$$a_2 \frac{d^2 q_0}{dt^2} + a_1 \frac{dq_0}{dt} + a_0 q_0 = b_0 q_i.$$

d/dt با اپراتور مشتق D جایگزین و پس از بازآرایی

$$q_0 = \frac{b_0 q_i}{a_0 + a_1 D + a_2 D^2}.$$

مشخصات دینامیکی ابزارها

با تعریف

K عنوان حساسیت استاتیکی

ω فرکانس طبیعی

ξ نسبت میرایی

$$K = \frac{b_0}{a_0} \quad ; \quad \omega = \sqrt{\frac{a_0}{a_2}} \quad ; \quad \xi = \frac{a_1}{2\sqrt{a_0 a_2}}$$
$$\frac{q_0}{q_i} = \frac{K}{\frac{D^2}{\omega^2} + \frac{2\xi D}{\omega} + 1}.$$

مشخصات دینامیکی ابزارها

پاسخ پله سیستم رسته دوم

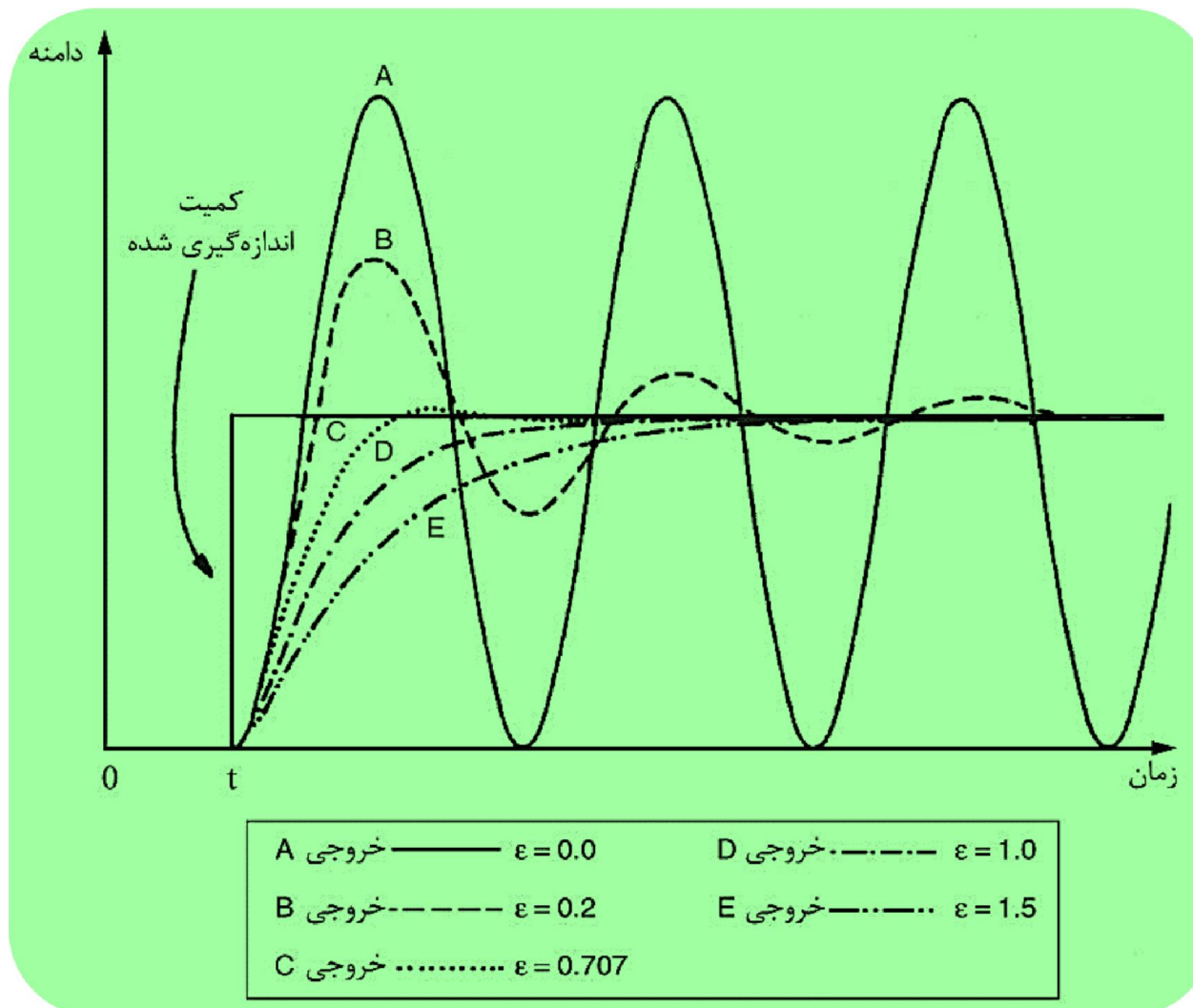


$$\lambda_1, \lambda_2 = -\zeta\omega_n \mp j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = -\zeta\omega_n \mp j\omega_d$$

Where $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}$

$$q_0(t) = K \left[1 - e^{-\xi\omega_n t} \left(\cos(\omega_d t) + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\omega_d t) \right) \right]$$

مشخصات دینامیکی ابزارها





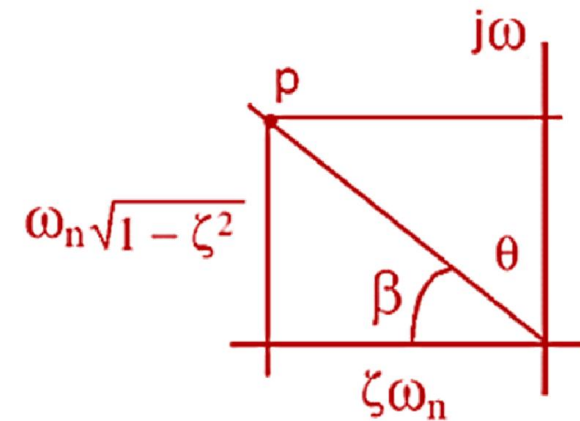
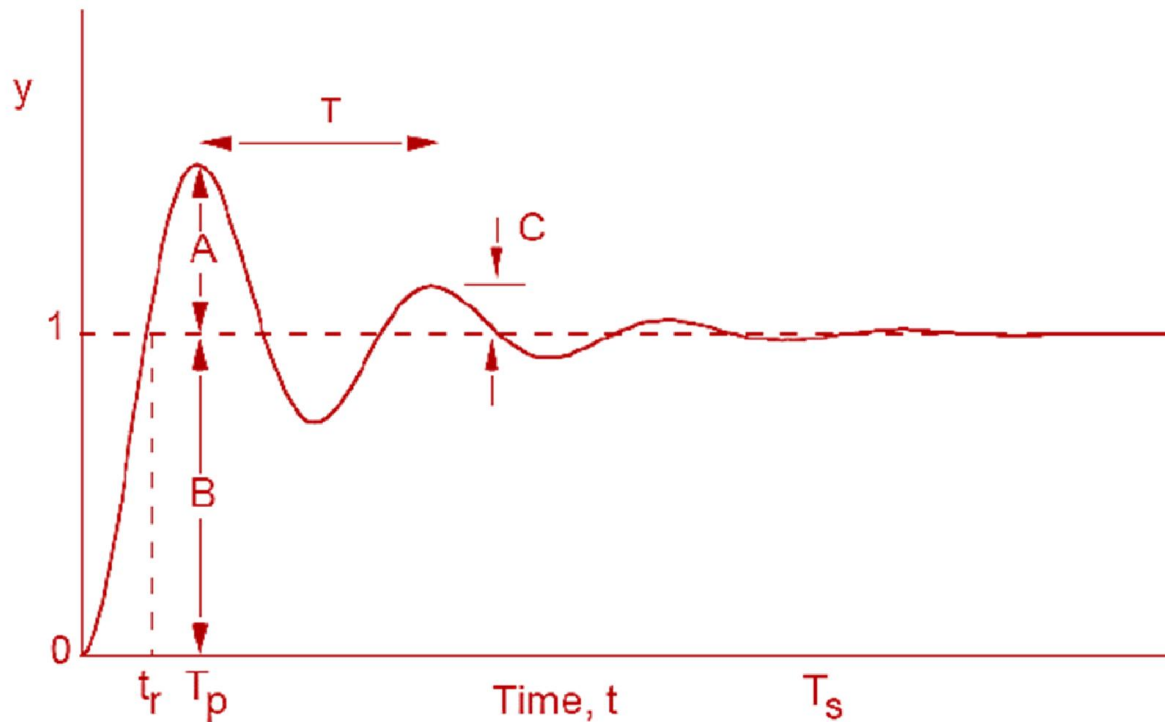
مشخصات دینامیکی ابزارها

◀ با مقایسه رفتار حالت ها و پیش بینی شرایط ورودی های مختلف، بهترین مقدار γ قابل محاسبه است.

◀ در بسیاری از ابزارهای تجاری رسته دوم همانند شتاب سنج ها، ضریب میرایی مرسوم در محدوده $0/6$ تا $0/8$ در نظر گرفته می شود.

مشخصات دینامیکی ابزارها

پاسخ پله سیستم رسته دوم و مشخصات کارایی



مشخصات دینامیکی ابزارها

پاسخ پله سیستم رسته دوم و مشخصات کارایی

زمان خیز (rise time): زمانی که پاسخ سیستم برای اولین بار به مقدار نهایی خود برسد.

$$t_r = \frac{1}{\omega_d} \tan^{-1} \left(\frac{\omega_d}{-\sigma} \right) = \frac{\pi - \beta}{\omega_d}$$

فراجهش (Overshoot): اولین یا بیشترین دامنه خروجی سیستم.

$$M_p = \exp \left(\frac{-\pi \xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \right)$$

مشخصات دینامیکی ابزارها

پاسخ پله سیستم رسته دوم و مشخصات کارایی 

زمان اوج (Peak time): زمانی که پاسخ سیستم به مقدار حداکثر خود برسد.

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d}$$

زمان نشست (Settling time): زمانی که پاسخ سیستم به مقدار نهایی خود رسیده و نوسانات آن میرا شوند.

$$t_s = \frac{3}{\xi \omega_n} \quad \text{for } 5\%$$

$$t_s = \frac{4}{\xi \omega_n} \quad \text{for } 2\%$$

مشخصات دینامیکی ابزارها

❖ پاسخ فرکانسی سیستم رسته دوم

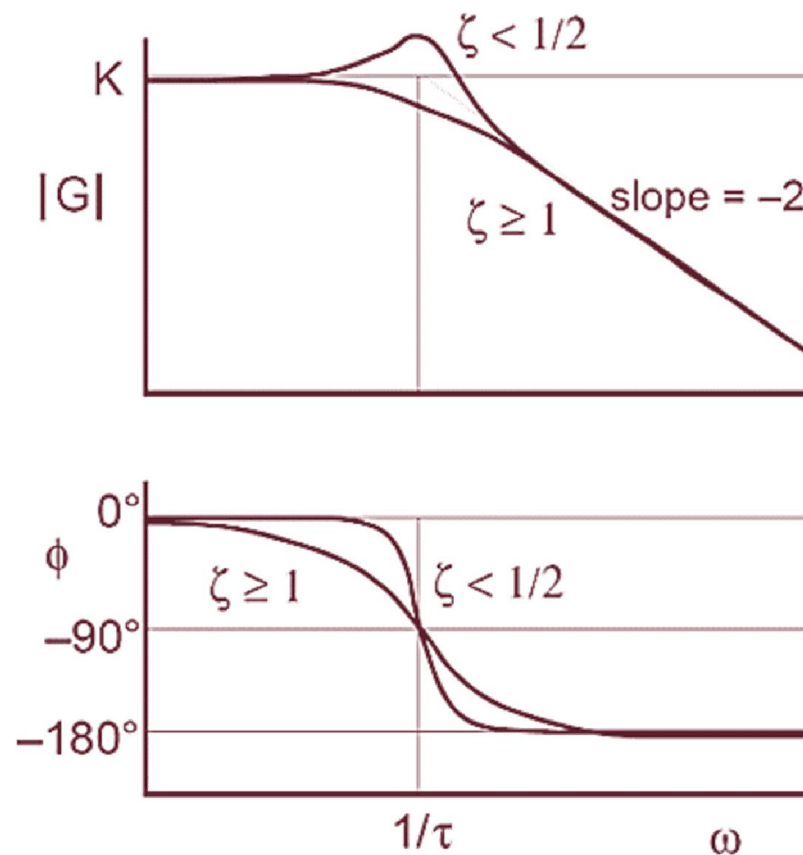
$$\frac{q_o}{q_i}(j\omega) = \frac{K}{(1 - (\omega / \omega_n)^2) + 2\xi \omega / \omega_n}$$

$$|G(j\omega)| = \left| \frac{q_o / K}{q_i} \right| = \frac{1}{\sqrt{(1 - (\omega / \omega_n)^2)^2 + (2\xi \omega / \omega_n)^2}}$$

$$\varphi = -\tan^{-1} \left(\frac{2\xi \omega / \omega_n}{1 - (\omega / \omega_n)^2} \right)$$

مشخصات دینامیکی ابزارها

❖ پاسخ فرکانسی سیستم رسته دوم





مشخصات دینامیکی ابزارها

با مشتق گرفتن از معادله دامنه فرکانسی سیستم رسته دوم برای پیدا کردن حداکثر دامنه و فرکانس مربوط به آن، (فرکانس رزونانس) داریم:

فرکانس رزونانس

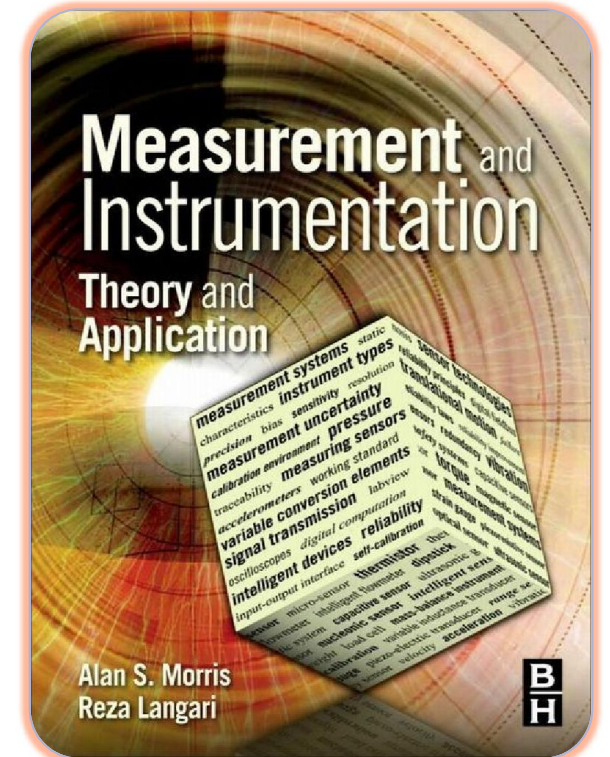
$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2}$$

دامنه رزونانس

$$M_r = \max |G(j\omega)| = |G(j\omega_r)| = \frac{1}{2\xi \sqrt{1 - \xi^2}}$$

منابع

- 📖 Measurement and Instrumentation: Theory and Application, A. S. Morris, R. Langari, 2013
- 📖 Measurement and Instrumentation Principles,
3rd Edition, Butterworth-Heinemann, (Alan S. Morris),
- 📖 Condensed Handbook of Measurement and Control
(3rd Edition), ISA publication, (N. E. Battikha)
- 📖 Measurement Systems : Application and Design,
McGraw-Hill, (E. Doebelin)





پایان جلسه سوم