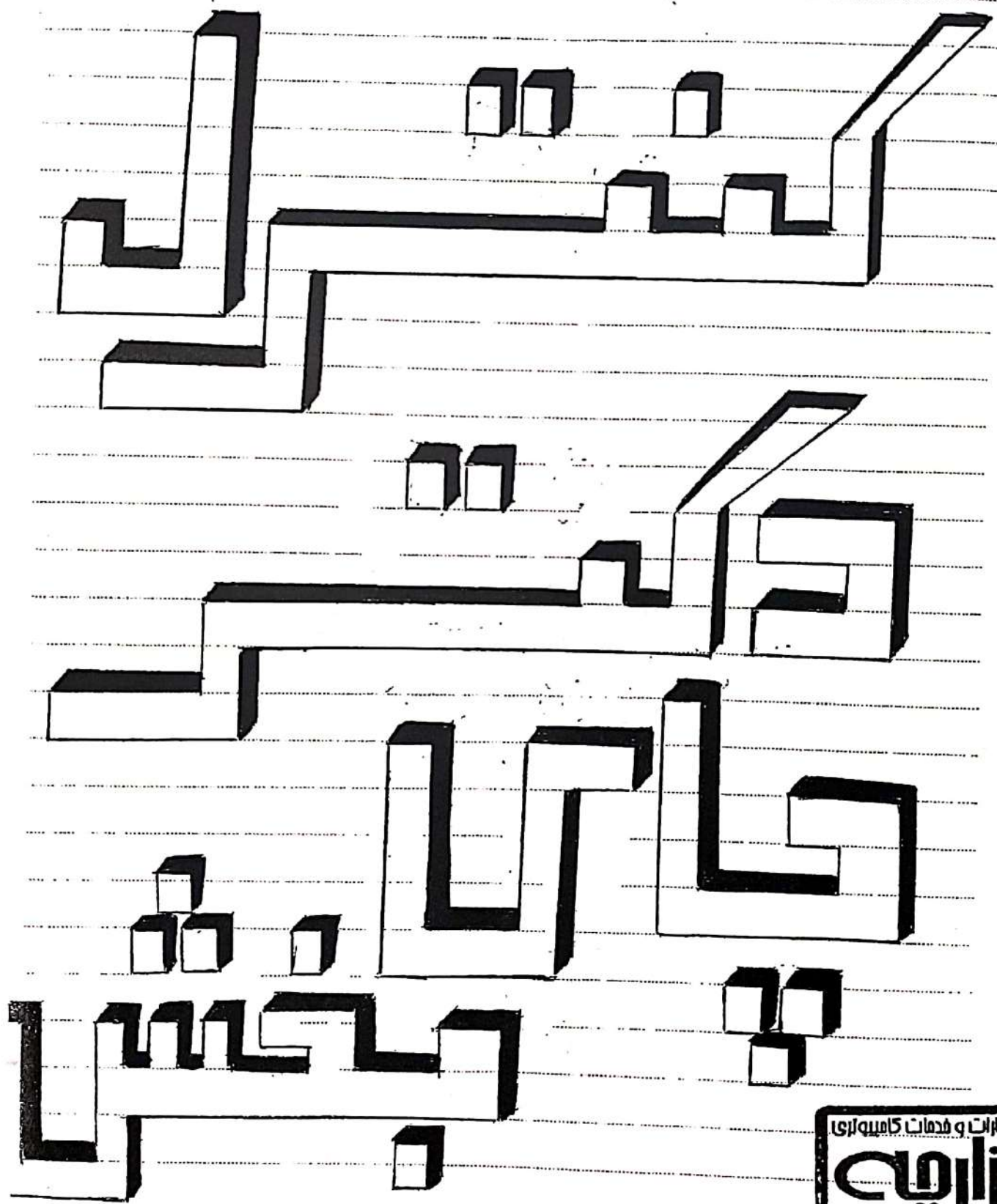
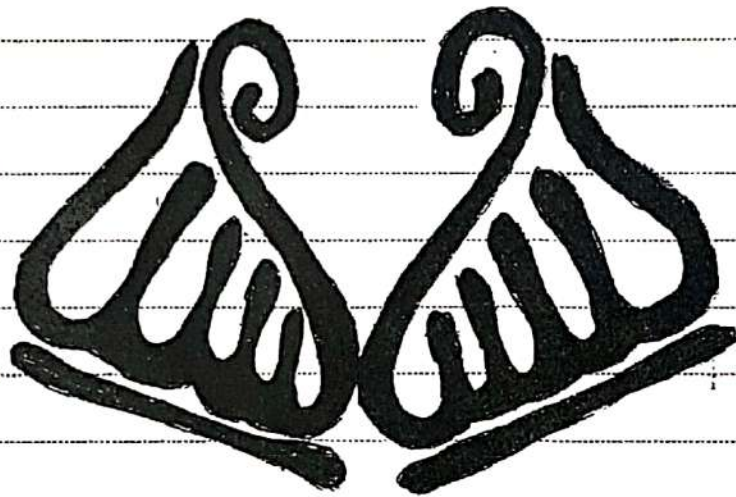


« يسلم الله الرحمن الرحيم »



التجارة و خدمات کامپیوتری
بازارچه

« Sina SD619 »



« Sina Sanedoust »

« فصل اول »

مفاهیم اولیه سیستم های دینامیکی و کنترل :

تعریف سیستم :

مجموعه ای با مشخصات و رفتار معین که به وسیله ی حدود فرضی (مرز) از محیط اطراف خود مجزای گردد و با توجه به ورودی ها و کارهایی که بر روی آنها صورت می گیرد خروجی های مشخصی را می دهد .

تعریف متغیرهای حالت :

متغیرهایی که با دانستن مقدار آنها در هر لحظه ی مشخص ، بتوان وضعیت و رفتار سیستم را در آن لحظه معین نمود .

تعریف ورودی و خروجی سیستم :

آنچه از خارج یک سیستم بر آن اثر می گذارد و باعث تغییر در متغیرهای حالت سیستم می شود ورودی یا علت نامیده می شود .

و آنچه را که تعیین تغییراتش در یک سیستم مورد توجه قرار می گیرد خروجی یا معلول نامیده می شود .

سیستم دینامیکی :

سیستمی را دینامیکی گویند که دارای حافظه بوده و گذشته ی خود را همواره به خاطر داشته باشد به عبارتی وضعیت آن در هر لحظه به وضعیت آن در گذشته بستگی داشته باشد .

مثلاً دو دماسنج که هر دو در دمای 15°C هستند را وارر محیطی با دمای 20°C می کنیم . یک از دماسنج ها بلافاصله عدد 20°C را نشان می دهد ولی دیگری به تدریج دمایش افزایش یافته تا اینکه به 20°C می رسد یعنی دمایش هر لحظه به دمای قبلی اش بستگی دارد و کم کم رشد می کند بنابراین دماسنج اولی یک سیستم استاتیکی و دماسنج دومی یک سیستم دینامیکی خواهد بود .

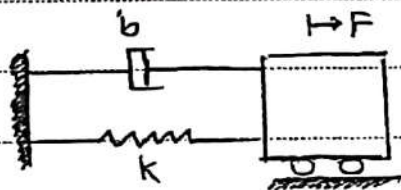
سیستم کنترلی و کنترل سیستم :

سیستم کنترلی سیستمی است که عکس العمل مطلوب و مورد نظری را ایجاد نماید.

کنترل سیستم یعنی به نظم در آوردن رفتار یا خروجی سیستم که راه رسیدن به این خواسته نیز صرفاً تنظیم و کنترل ورودی به آن سیستم است.

نکاتی که در سیستم های کنترل خطی (کلاسیک) باید در نظر گرفت :

- ① خاصیت خطی داشته باشند یعنی اینکه تمامی مشخصات آنها خاصیت های منحصر به فرد خودشان را داشته باشند.
مثلاً در سیستم جرم و فنر و رمپر، قطر فقط خاصیت فنریت داشته باشد و خاصیت رمپر نداشته باشد.



- ② متغیرهای حالت مانند جرم، فنر و نامتغیر با زمان باشند



$$m(t)\ddot{x} + kx = 0$$

× سیستم کنترلی خطی $\rightarrow$ time variant system

که چنین سیستم هایی که خطی و نامتغیر با زمان هستند اصطلاحاً سیستم های LTI گویند.

فضای حالت state space :

برای حل معادلات دیفرانسیلی همچون $m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = u(t)$ با داشتن شرایط اولیه می توان موقعیت سیستم را در هر لحظه درس زد و بررسی نمود که این حالت که به کمک آن می توان وضعیت سیستم را در هر لحظه

حالت یا state space گویند

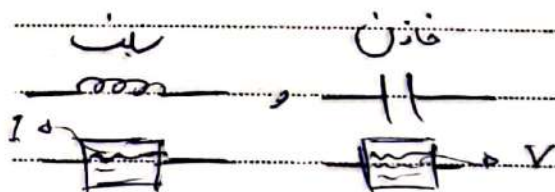
$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = u(t)$$

$$x(t) = ?$$

تغییر مکان اولیه
سرعت اولیه
بهترین شرایط اولیه که می توان
وضعیت سیستم را در هر لحظه درس
زد

$$\begin{cases} x(0) = ? \\ \dot{x}(0) = ? \end{cases}$$

تفاوت خازن و سلف



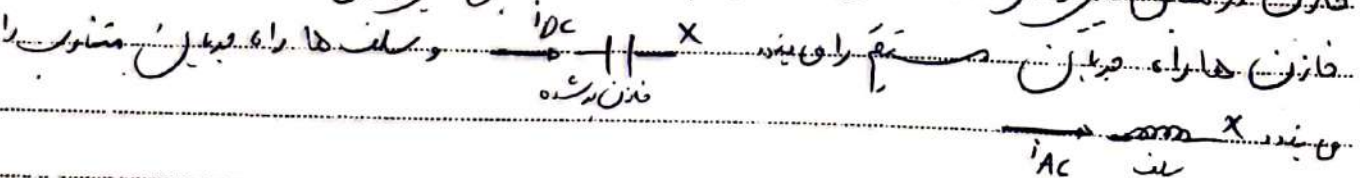
۱. القاشند ما همیشه یک سیم به یک سیم است
وقتی جریان از سلف عبور می کند یک میدان مغناطیسی ایجاد می شود و یک سیم انرژی مغناطیسی را
ذخیره می کند تا زمانی که آزاد شود

میدان مغناطیسی که سلف را به یک سیم فانی عمل می کند

وقتی جریان از سلف عبور می کند یک میدان مغناطیسی ایجاد می شود و یک سیم انرژی مغناطیسی را

خازن و لولای را به عنوان انرژی ذخیره می کند و سلف را به عنوان انرژی مغناطیسی ذخیره
می کند

خازن در مقابل تغییر ولتاژ متناوب است و سلف در مقابل تغییر جریان متناوب است و کند



* مانده اولی در این شکل دورانی نشان می دهد

در فصل دوم «

نمایش اجزاء سیستم.

سیستم های انرژی دار و اجزای آن.

سیستم های انرژی دار، بر حسب تعریف، سیستم هایی هستند که به نحوی

انرژی را در خود ذخیره یا مستهلک می کنند و یا منابع ذخیره انرژی هستند.

اجزای سیستم های انرژی دار الکتریکی:

مقاومت $\frac{m}{R}$ سلف $\frac{m}{L}$ خازن $\frac{m}{C}$

در این درس جریان الکتریکی و پتانسیل الکتریکی با مفاهیمی زیر نشان داده می شوند

جریان: $f(t)$ پتانسیل: $P(t)$

همچنین عملگری که باید آن را شناخت عبارت است از:

$$\frac{d}{dt} \quad \text{« مشتق »} \quad \int dt = \frac{1}{D} \quad \text{« انتگرال »}$$

نکته:

در مورد مقاومت و سلف و خازن همان طوری که قبلاً خوانده ایم سعی داریم:

مقاومت $\frac{R}{m}$ $P(t) = R \cdot f(t)$

سلف $\frac{L}{m}$ $P(t) = L \frac{df(t)}{dt} = (L \bar{D}) f(t) = Z f(t)$

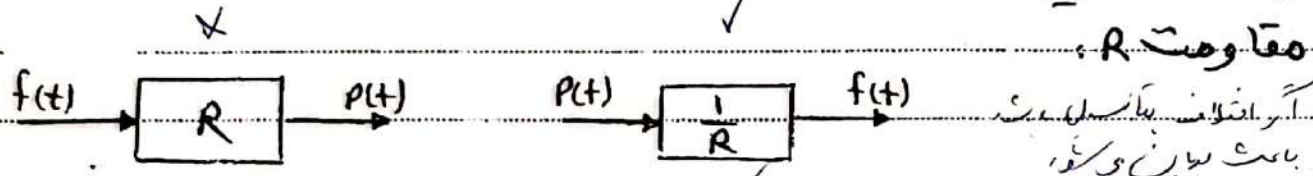
خازن $\frac{C}{m}$ $f(t) = C \frac{dP(t)}{dt} = (C \bar{D}) P(t) = Y P(t)$

که در رابطی فوق Z را امپدانس و Y را ادمیتانس گویند و رابطی آنها

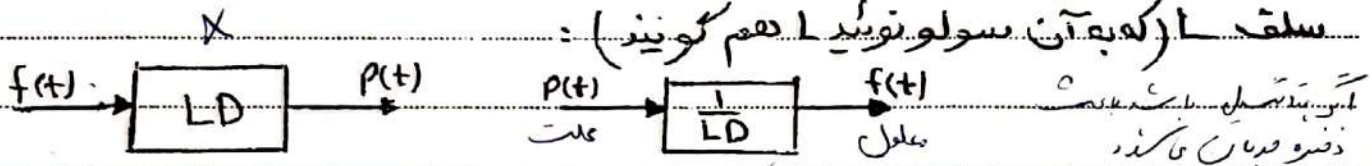
به صورت $z = \frac{1}{R}$ می باشد

هر کدام از این روابط را می توان به کمک نمایش ترسیمی بقیه ای به یکی از حالات زیر نمایش داد.

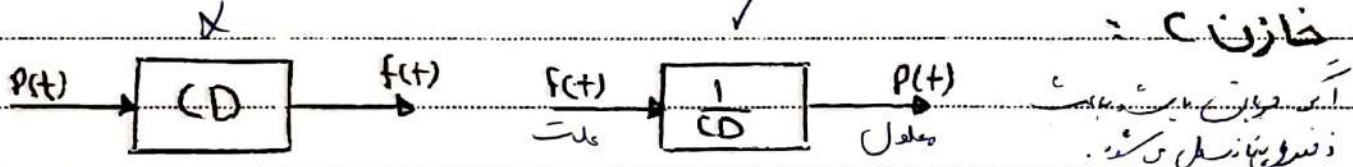
مقاومت R



سلف L (که به آن سولونویید L هم گویند):

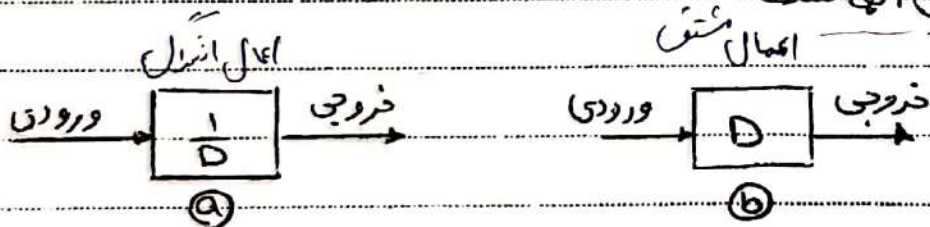


خازن C

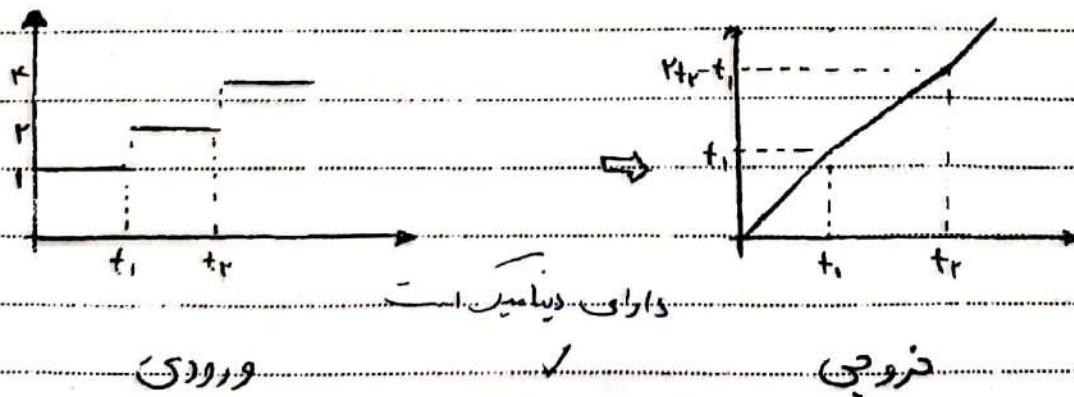


به عبارتی در حالت های سلف و خازن باید به این نکته اشاره کرد که اگر چه هر دو شکل آن می توان درست باشد ولی اشکال صحیح ترسیم آنها هستند

اشکال سمت راستی آنهاست



به عنوان مثال شکل به صورت زیر در نظر می گیریم:



می دانیم که اننگرال نسبت به زمان هر تابع به فضای حاصل جمع اطلاعات گذشته‌ی مربوط به آن تابع بوده و از نظر ریاضی این اننگرال نیز عبارت از سطح زیر منحنی تابع ورودی از زمان صفر تا زمان مورد نظر است. بنابراین مکانیزمی مانند $\textcircled{a}$ که معرف یک اننگرال گیرنده است هم از نظر فیزیکی قابل ساخت بوده و هم دارای مفهوم ریاضی است.

در حالی که سیستم $\textcircled{b}$ که بنایش یک مشتق گیرنده بوده و بنایش می دهد که خروجی سیستم برابر مشتق ورودی نسبت به زمان است یک سیستم غیر واقعی است زیرا:

- ① اگر ورودی به این سیستم تابعی نظیر نمودار صفدی قبل باشد در این صورت خروجی (که مشتق ورودی است) یک تابع معین و پیوسته نخواهد بود زیرا در فاصله‌ی زمانی صفر تا t_1 که ورودی ثابت و مساوی واحد است مشتق آن یعنی خروجی مساوی صفر خواهد بود و به همین ترتیب در زمان t_1 خروجی به می شود زیرا به طور کلی مشتق مساوی شیب تابع ورودی است و در زمان t_1 نیز شیب به است مجدداً در فاصله‌ی $t_1 < t < t_2$ نیز خروجی برابر صفر شده و دوباره در زمان t_2 مساوی به است بنابراین خروجی تابعی ناپیوسته و ناعین خواهد بود.
- ② از نظر فیزیکی نیز نمی توان چنین مکانیزمی ساخت زیرا همان طور که بر می آید چنین سیستمی باید بتواند از صفر تا به حساسیت داشته باشد یعنی علی رغم اینکه ورودی تابع معین و پیوسته است خروجی باید بتواند از صفر تا به تغییر کند که این غیر ممکن است.

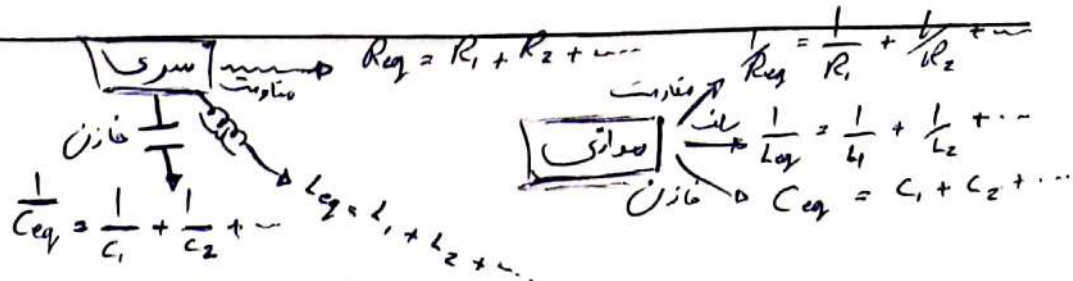
نمود:

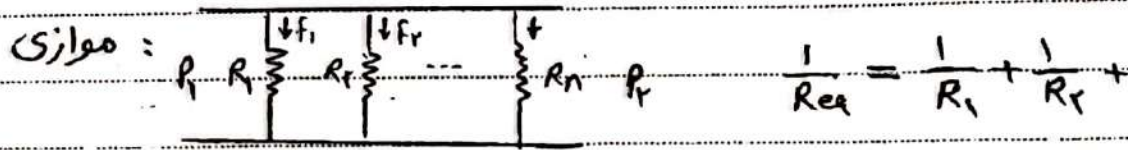
همان طوری که از گذشته می دانیم نحوه‌ی ترکیب مقاومت ها به صورت زیر می باشند که سلف ها سلف مقاومت و خازن برعکس مقاومت عمل می کند.

$$\text{سری: } \begin{array}{c} F \\ \downarrow \\ R_1 \quad R_2 \quad \dots \quad R_n \\ \uparrow \\ P_1 \quad P_2 \end{array} \quad R_{eq} = R_1 + R_2 + \dots$$

PARCO

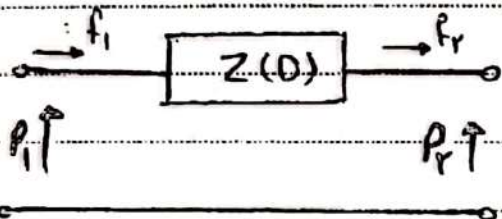
Sina SD619





ترکیب اجزاء سیستم های انرژی دار الکتریکی :

(I) مدار سری



$$Z(D) = \frac{P(t)}{f(t)}$$

$$f_1 = f_2$$

$$P_1 - P_2 = Z(D) f_1 = Z(D) f_2 \Rightarrow P_1 = P_2 + Z(D) f_2$$

$$P_1 - P_2 = Z(D) f_2$$

افت ولتاژ

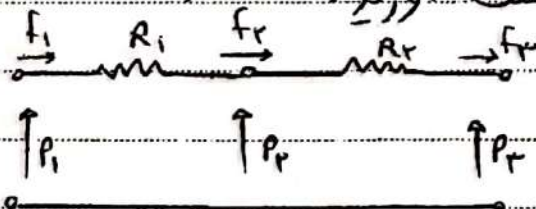
که نمایش ماتریسی رابطه ی فوق به صورت زیر است :

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ f_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & Z(D) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_2 \\ f_2 \end{bmatrix}$$

که طبق روابط صدقی ۴ :

$$Z = \begin{cases} \text{مقاومت} = R \leftrightarrow P = R f \\ \text{خازن} = \frac{1}{C D} \leftrightarrow P = \frac{1}{C D} f \\ \text{سلف} = L D \leftrightarrow P = L D f \end{cases}$$

مثال) رابطه ی بین P_1, f_1, P_2, f_2 در یک سیستم آوری :



$$\begin{bmatrix} P_1 \\ f_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & R_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_2 \\ f_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} P_r \\ f_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & R_r \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_r \\ f_r \end{bmatrix}$$

سری
بزرگ شداریت ما

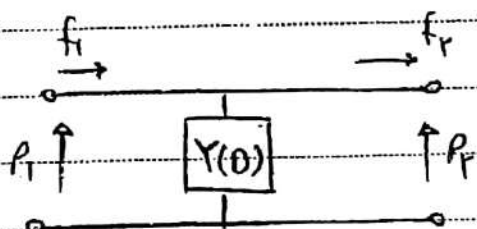
$$\Rightarrow \begin{bmatrix} P_1 \\ f_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & R_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & R_r \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_r \\ f_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & (R_1 + R_r) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_r \\ f_r \end{bmatrix}$$

که از همان ابتدا نیز می توانستیم به چنین نتیجه ای دست یابیم تنها کافی بود

$$Z(0) = R_1 + R_r$$

لحاظ گردد.

(II) مدار موازی



$$Y(0) = \frac{f(t)}{P(t)}$$

$$\begin{cases} P_1 = P_r \\ f_1 - f_r = Y(0) P_1 = Y(0) P_r \end{cases} \Rightarrow f_1 = f_r + Y(0) P_r$$

که نمایش ماتریسی رابطه ی فوق به صورت زیر است:

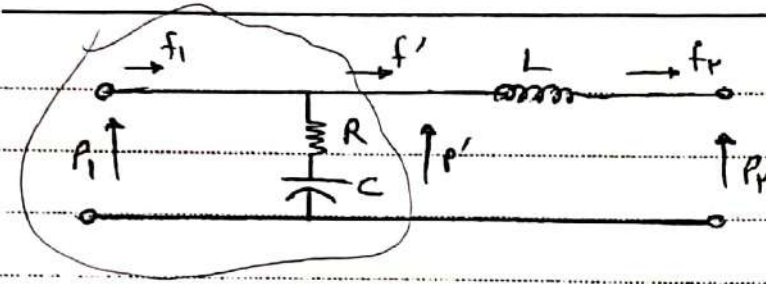
$$\begin{bmatrix} P_1 \\ f_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ Y(0) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_r \\ f_r \end{bmatrix}$$

ماتریس انتقال

که طبق روابط صفدی:

$$Y \text{ (مقیاس معادل)} = \begin{cases} \text{مقاومت} = \frac{1}{R} & \longleftrightarrow f = \frac{1}{R} P \\ \text{خازن} = C D & \longleftrightarrow f = C D P \\ \text{سلف} = \frac{1}{L D} & \longleftrightarrow f = \frac{1}{L D} P \end{cases}$$

مثال) رابطه ی بین P_1 و f_1 و P_r و f_r را در نمودار رسم شده در صفدی بعد بدست آورید.



$$R, C \Rightarrow Z(s) = R + \frac{1}{Cs} = \frac{RCs + 1}{Cs} \Rightarrow Y(s) = \frac{1}{Z(s)} = \frac{Cs}{RCs + 1}$$

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ f_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{Cs}{RCs + 1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P' \\ f' \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} P' \\ f' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & LD \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_r \\ f_r \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} P_1 \\ f_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{Cs}{RCs + 1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & LD \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_r \\ f_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & LD \\ \frac{Cs}{RCs + 1} & \frac{CLDs}{RCs + 1} + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_r \\ f_r \end{bmatrix}$$

مادی سری

اجزاء سیستم های انرژی دار مکانیکی:



از قبل می دانیم که:

فتر $\frac{k}{m}$ $F = kx$

دمپر $\frac{b}{b}$ $F = b\dot{x}$

جرم $\frac{m}{m}$ $F = m\ddot{x}$

سیستم های مکانیکی را از دو طریق می توان به سیستم های الکتریکی

مدلسازی نمود که عبارتند از:

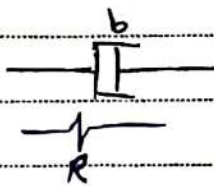
(I) انتخاب اول:

شیربازنده مدار مکانیکی به الکتریکی

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{نیرو } F = P(t) \text{ پتانسیل الکتریکی} \\ \text{سرعت } v = f(t) \text{ جریان الکتریکی} \end{array} \right. \Rightarrow v = \dot{x}$$

از تحلیل سب

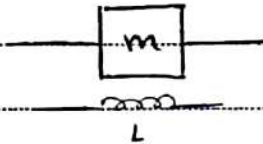
در این حالت طبق روابط صفحی ۹ داریم:



$$\left\{ \begin{array}{l} F = b v = b \dot{x} \\ P(t) = b f(t) \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow R = b$$

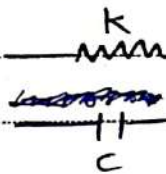
«دمپر نقش مقاومت را بازی می کند»



$$\left\{ \begin{array}{l} F = m \ddot{x} = m D^2 x \\ P(t) = m D^2 f(t) \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow L = m$$

«جرم نقش سلف را بازی می کند»



$$\left\{ \begin{array}{l} F = k x = k \frac{1}{D} \dot{x} \\ P(t) = \frac{1}{C D} f(t) \end{array} \right.$$

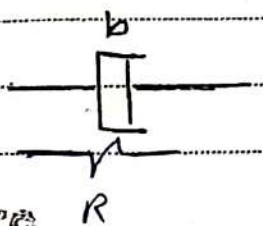
$$\Rightarrow C = \frac{1}{k}$$

«مخزن نقش عکس خازن را بازی می کند»

(II) انتخاب دوم:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{سرعت } v = P(t) \text{ پتانسیل الکتریکی} \\ \text{نیرو } F = f(t) \text{ جریان الکتریکی} \end{array} \right. \Rightarrow \text{از تحلیل موازی}$$

در این حالت طبق روابط صفحی ۹ داریم:

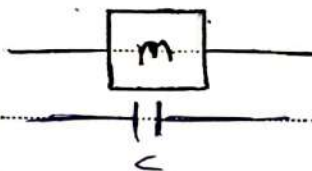


$$\left\{ \begin{array}{l} F = b v = b \dot{x} \\ f(t) = \frac{1}{b} P(t) \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow R = \frac{1}{b}$$

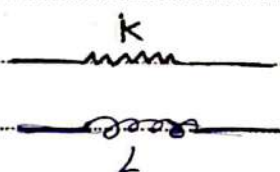
سری

در دایره نقش عکس مقاومت را بازی می کند»



$$\begin{cases} F = m\ddot{x} = mD^2x \\ f(t) = \epsilon D P(t) \end{cases} \Rightarrow \boxed{C = m}$$

«جرم نقش خازن را بازی می کند»

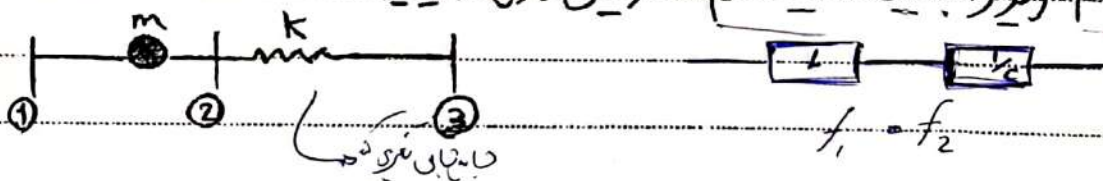


$$\begin{cases} F = kx = k \frac{1}{D} \dot{x} \\ f(t) = \frac{1}{LD} P(t) \end{cases} \Rightarrow \boxed{L = \frac{1}{k}}$$

«مقاومت نقش سلف را بازی می کند»

جابجایی تعریف کن

مثال) سیستم زیر را به یک سیستم الکتریکی مدل نماید



انتخاب اول

$$\begin{cases} P = F \\ f = v \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ f_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_2 \\ f_2 \end{bmatrix}$$

①، ② سرعت برابر → جابجایی ①، ② یکسان است → جسم صلب است ①-②

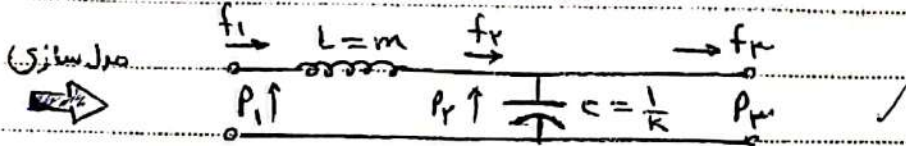
برابر → $f_1 = f_2$ سری $L = m$

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ f_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & mD \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_2 \\ f_2 \end{bmatrix} \checkmark$$

②-③ نیرو ①، ② برابرند

نیروی برابر → $P_2 = P_3$ موازی $\frac{1}{C} = \frac{1}{k}$

$$\begin{bmatrix} P_2 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ D & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_3 \\ f_3 \end{bmatrix} \checkmark$$



سیستم دینامیکی: سیستمی که حال عملکردی به اتفاق گذشته آن وابسته است

آونما

Subject, Page 12 ✓

Year, Month, Date, ()

open book control

بررسی نحوه عملکرد در حالت حاکمیت دار است

$$\text{انتخاب دو} \left\{ \begin{array}{l} P = \text{پتانسیل} \\ f = \text{جریان} \end{array} \right.$$

سرعت $\dot{\theta}$, $\dot{\phi}$ یکسان $\rightarrow$ جابجایی θ , ϕ یکسان $\rightarrow$ جسم صلب ۲-۱

$$\Rightarrow P_1 = P_2 \quad \begin{array}{c} c=m \\ || \\ \text{مردوب} \\ \text{محل سازی} \end{array} \quad \begin{array}{c} f_1 \quad f_2 \quad L = \frac{1}{K} \\ \text{mm} \end{array} \rightarrow f_3$$

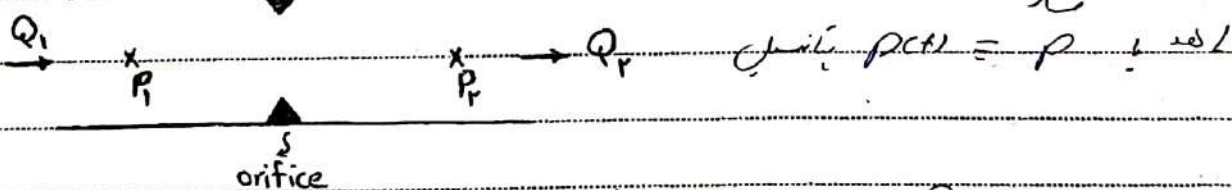
۲-۳ نیرو $\dot{\theta}$, $\dot{\phi}$ برابرند

$$\Rightarrow f_2 = f_3 \quad \begin{array}{c} L = \frac{1}{K} \\ \text{mm} \end{array}$$

اجزاء سیستم های انرژی دار در سیالات:

یک انتخاب مناسب برای پتانسیل P و جریان f در سیستم سیال، فشار و دبی است. از آنجا که در سیالات فشار هیدرواستاتیک معمولاً بر حسب ارتفاع سیال سنجیده می شود لذا به جای فشار می توانیم ارتفاع سیال را به عنوان معرف پتانسیل در نظر بگیریم.

$$\Delta P = \Delta V \quad \frac{Q = f}{R_f}$$



$$\Delta P \propto \frac{Q}{V \cdot R_L}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_1 = Q_2 \quad \text{جریان} \\ P_1 - P_2 = R_{f_{loc}} \times Q \quad \text{افتلاف پتانسیل} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{elec} = R_f \quad (\text{bar-KPa}) \quad (m) \\ P(t) = \text{فشار} \quad P(t) = \text{پتانسیل} \\ f(t) = \text{جریان} \quad Q \end{array} \right. \quad \checkmark$$

Page

Sina 50619

روشی ۱ -> اعمال دینر

روشی ۲ -> ظرف

Subject, page 13 ✓

Year, Month, Date, ()

نکته:

رابطه ای که بین مقاومت فشاری و ارتفاعی وجود دارد برابر است با:

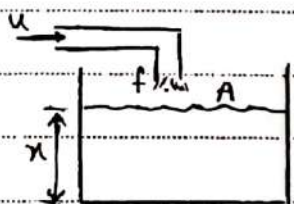
$$P = \rho g h$$

$$R_p = \rho g R_h$$

* در سیستم های سیالاتی، کمیت A یعنی سطح مقطع مخزن در سیستم

سیال، مقاومت ظرفیت C خازن در سیستم الکتریکی با رابطه $C \equiv A$

است.



$$\frac{d}{dt} (V) = Q \rightarrow \frac{d}{dt} (A \cdot x) = Q$$

$$\text{If } A = \text{cte} \rightarrow A \frac{d}{dt} x = Q$$

که با مقاومت ساری با سیستم الکتریکی داریم:

$$C \frac{d}{dt} p(t) = f(t)$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$C \equiv A$$

نکته:

* غیر قابل تراکم * اثر انباشتن در سطح ها ندارم مگر در کندانسورها

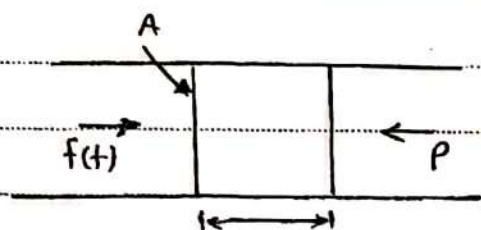
برای سیالات معمولاً مقاومت سلف یا سولونوئید در سیستم الکتریکی مقرر می

نمی شود. زیرا در سیستم سیالاتی مقاومت سلف به اثر اینرسی بستگی دارد

که برای سیستم های مورد بحث ما قابل صرف نظر کردن است ولی چنانچه

بخواهیم چنین مقاومتی را بنویسیم داریم:

تغییر اندازه حرکت در واحد زمان (نرخ تغییرات منفی) = برای نیروها



سطح فشار
نیرو $F = p \cdot A$ $\frac{\text{kg}}{\text{m}^2} \times \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \times \frac{1}{\text{m}^2} \times \text{m}^3 = \text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$
مشتق $m = \rho \cdot Q$ $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times \frac{\text{m}^3}{\text{s}} = \frac{\text{kg}}{\text{s}}$
ری یکای
زمانی

$$p \cdot A = \rho \cdot Q \cdot v = \rho \cdot A \cdot \frac{d}{dt} Q \rightarrow \frac{d}{dt} f(t) = \frac{A}{\rho} p(t)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(t) = \frac{A}{\rho D} p(t) \\ f(t) = \frac{1}{LD} p(t) \end{cases} \Rightarrow \frac{A}{\rho D} = \frac{1}{LD} \Rightarrow L = \frac{\rho}{A}$$

ترکیب اجزای سیستم های انرژی دار:

دوره برای ترکیب اجزا وجود دارد

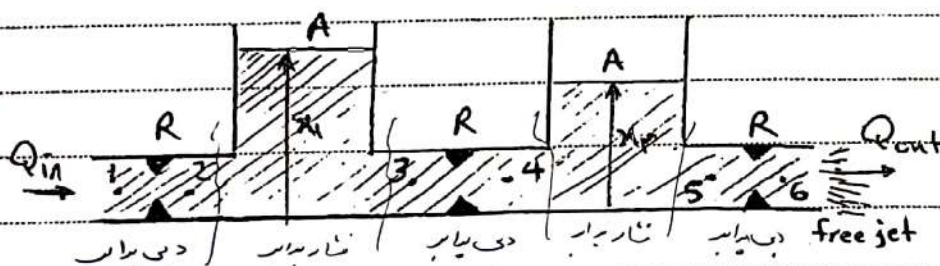
① تقسیم یا بخش کردن (استفاده از متغیرهای ورودی و خروجی برای

حل مساله)

② نوشتن معادلات

مثال) در سیستم نشان داده شده ی زیر رابطی بین x_1, x_2 را با فشار ورودی

p_1 بدست آورید.



حل معادلاتی:

توجه:

برای حل اینگونه مسائل سیالات همواره می توان از رابطی زیر استفاده نمود

دبی جریان خروجی - دبی جریان ورودی = تغییرات حجم درون ظرف

به عبارتی همواره ظرف اولی را می توان نسبت به ظرف بعدی آن دارای ارتفاع بالاتری فرض نمود و در این حالت همواره جریان در حال خارج شدن است البته اگر این کار هم صورت نگیرد تفاوتی ایجاب نمی شود و جریان به جای خروج در حال وارد شدن خواهد بود

$$\frac{dx}{dt} = Q_{in} - Q_{out} \rightarrow A \frac{dx}{dt} = Q_{in} - Q_{out}$$

۱ طرف: $A \frac{dx_1}{dt} = Q_1 - \frac{x_1 - x_2}{R} = \frac{0 - x_1}{R} - \frac{x_1 - x_2}{R}$

۲ طرف: $A \frac{dx_2}{dt} = \frac{x_1 - x_2}{R} - Q_2 = \frac{x_1 - x_2}{R} - \frac{x_2 - 0}{R}$

$$\Rightarrow \begin{cases} A \dot{x}_1 = -\frac{2}{R} x_1 + \frac{x_2}{R} \\ A \dot{x}_2 = \frac{x_1}{R} - \frac{2}{R} x_2 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{در فصل های آینده حل اینگونه} \\ \text{معادلات آموخته می شود} \end{matrix}$$

که با استفاده از معلومات ریاضی مهندسی می توان این دو معادله را حل نمود

حل ماتریسی: $C = \frac{A}{s g}$

$$\begin{aligned} \begin{matrix} \text{سری} \\ \begin{bmatrix} P_1 \\ f_1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & R \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_2 \\ f_2 \end{bmatrix} \end{matrix} & \quad \text{I} \quad \begin{cases} f_1 = f_2 \\ P_1 - P_2 = R f_2 \end{cases} \\ \begin{matrix} \text{موازی} \\ \begin{bmatrix} P_2 \\ f_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ CD & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_3 \\ f_3 \end{bmatrix} \end{matrix} & \quad \text{II} \quad \begin{cases} f_2 - f_3 = \left(\frac{A}{s g}\right) D P_3 = C D P_3 \\ P_2 = P_3 \end{cases} \\ \begin{matrix} \text{سری} \\ \begin{bmatrix} P_3 \\ f_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & R \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_4 \\ f_4 \end{bmatrix} \end{matrix} & \quad \text{III} \quad \begin{cases} f_3 = f_4 \\ P_3 - P_4 = R f_4 \end{cases} \\ \begin{matrix} \text{موازی} \\ \begin{bmatrix} P_4 \\ f_4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ CD & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_5 \\ f_5 \end{bmatrix} \end{matrix} & \quad \text{IV} \quad \begin{cases} f_4 - f_5 = \left(\frac{A}{s g}\right) D P_5 = C D P_5 \\ P_4 = P_5 \end{cases} \\ \begin{matrix} \text{سری} \\ \begin{bmatrix} P_5 \\ f_5 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & R \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_6 \\ f_6 \end{bmatrix} \end{matrix} & \quad \text{V} \quad \begin{cases} f_5 = f_6 \\ P_5 - P_6 = R f_6 \end{cases} \end{aligned}$$

$$Q = \frac{d}{dt} (Ax) = A \frac{dx}{dt} = ADx \quad \leftarrow \text{مد}$$

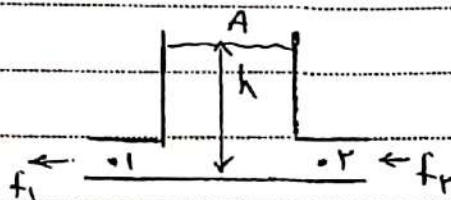
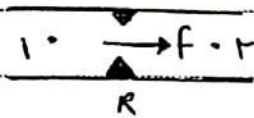
یعنی: $p = \rho g h \Rightarrow h = \frac{p}{\rho g}$

$$f = Q \text{ و } p = h \Rightarrow f = ADp$$

$$\Rightarrow \boxed{C = A}$$

$$f = Q \text{ و } p = p'_{\text{مسا}} \Rightarrow Q = A \frac{d}{dt} \frac{p'}{\rho g} = \frac{A}{\rho g} \frac{dp'}{dt} = \frac{A}{\rho g} DP' \Rightarrow \boxed{C = \frac{A}{\rho g}}$$

وی رانیم که:



$$\begin{bmatrix} p_1 \\ f_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & R \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_2 \\ f_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ f_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ AD & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_2 \\ f_2 \end{bmatrix}$$

دبی $f = Q$ بران
 مد $p = h$ پتانسیل

حال پس از سازه سازی در نهایت خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ f_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1+RCD)^2 + RCD & R(1+RCD)(1+RCD) \\ CD(1+RCD) & (1+RCD)^2 + RCD \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_2 \\ f_2 \end{bmatrix}$$

حال با توجه به اینکه نقطه ۲ در معرض جت آزاد است در نتیجه $p_2 = 0$ است
 و خواهیم داشت:

$$p_1 = R(1+RCD)(1+RCD)f_2 \quad (1)$$

$$f_1 = [(1+RCD)^2 + RCD]f_2 \quad (2)$$

و از تقسیم دو رابطه برهم خواهیم داشت:

$$f_1 = \frac{(1+RCD)^2 + RCD}{R(1+RCD)(1+RCD)} p_1 \quad (3)$$

از رابطه ۱ می رانیم که:

$$p_2 - p_1 = R f_2 = R f_1$$

$$\Rightarrow R f_1 = p_2 - p_1 \Rightarrow f_1 = \frac{p_2 - p_1}{R} \quad (*)$$

از طرفی از رابطه I داریم:

$$P_5 - P_4^{in} = R f_5 = R f_4$$

$$\Rightarrow R f_4 = P_5 \rightarrow f_4 = \frac{P_5}{R} \quad \text{**}$$

با جای گذاری رابطه فوق در معادله ① داریم:

$$P_1 = R (1 + RCD) (3 + RCD) \frac{P_5}{R}$$

رابطه فوق و همچنین رابطه * را در معادله ③ قرار می دهیم و در نهایت داریم:

$$\frac{P_2 - P_1}{R} = \frac{(1 + RCD)^2 + RCD}{R (1 + RCD) (3 + RCD)} \cdot R (1 + RCD) (3 + RCD) \frac{P_5}{R}$$

$$\Rightarrow P_2 - P_1 = [(1 + RCD)^2 + RCD] P_5$$

$$\text{از طرفی: } \begin{cases} P_2 = P_3 = 8g x_1 \\ P_4 = P_5 = 8g x_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow P_1 = 8g (x_1 - [(1 + RCD)^2 + RCD] x_2)$$

اجزای سیستم های انرژی دار حرارتی:

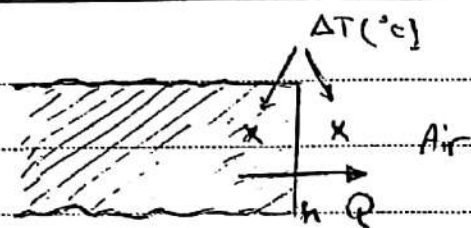
در اینگونه سیستم ها معادل سازی به صورت زیر انجام می شود:

$$\text{پتانسیل الکتریکی} \quad P(t) \equiv T \quad \checkmark \quad \text{ما}$$

$$\text{دبی حرارتی} \quad f(t) \equiv Q \quad \checkmark \quad \text{جریان الکتریکی}$$

* برای بدست آوردن مقاومت معادل در این سیستم:

① اگر انتقال حرارت از نوع جابجایی یا convection باشد داریم:



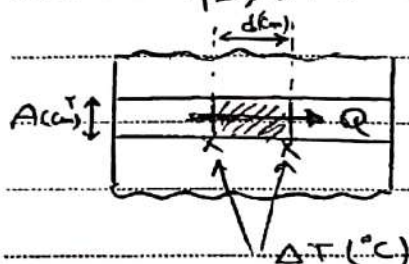
$$Q = h A \Delta T$$

$$f(t) = h A P(t)$$

$$f(t) = \frac{1}{R} P(t)$$

$$\Rightarrow R = \frac{1}{hA}$$

⑤ اگر انتقال حرارت از نوع رسانش یا Conduction باشد؛ داریم:



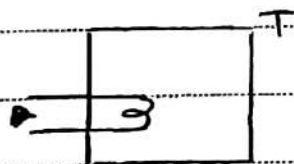
$$Q = K A \frac{\Delta T}{\Delta x} = K A \frac{1}{d} \Delta T$$

$$f(t) = \frac{K A}{d} P(t)$$

$$f(t) = \frac{1}{R} P(t)$$

$$\Rightarrow R = \frac{d}{K A}$$

* برای بدست آوردن خازن معادل سیستم های حرارتی؛ رابطه ی تعادل حرارتی اینگونه سیستم ها را در نظر می گیریم:



$$\dot{Q} = M c \frac{dT}{dt} = \dot{Q}$$

به صورت شار نسبت به زمان

$$f(t) = M c \frac{d}{dt} P(t) = M c D P(t)$$

$$f(t) = C D P(t)$$

$$\Rightarrow C = M c$$

خازن ظرفیت گرمایی ویژه

* در سیستم های حرارتی المانی و عازل سلف تقریباً نقشه است

9

سایر سیستم های انرژی دار

تراش دیوسرها و تراشفوررها

تراش دیوسرها وسیله ای است که یک نوع انرژی را به نوع دیگری (مثلاً انرژی

مکانیکی را به انرژی هیدرولیکی) تبدیل می کند

تراشفوررها وسیله ای است که اساساً انتقال انرژی را (بدون تغییر آن

از نوعی به نوع دیگر) به عهده دارد که در عین حال ضمن ثابت نگه داشتن مقدار

کل انرژی، موجب کاهش یا افزایش اجزای انرژی (یعنی پتانسیل یا جریان)

می گردد به طوری که حاصل ضرب آنها همواره مقدار ثابتی باقی می ماند

در تراش دیوسرهای ایده آل اتلاف انرژی وجود ندارد به همین خاطر قدرت یا

توان در یک طرف تراش دیوسر (اولیه) با قدرت یا توان در طرف دیگر آن (ثانویه)

برابر است به همین خاطر برای نوشتن تساوی در دو طرف بانیستی از انرژی های

۱ و ۲ استفاده نمود که همین موضوع در یک تراشفورها توراید آل نیز برقرار

است و از آنجایی که در سیستم های مکانیکی، الکتریکی و هیدرولیکی حاصل

ضرب «پتانسیل در جریان» نشان دهنده قدرت یا توان است، داریم:

$$P_1 f_1 = P_2 f_2 = P_{\text{توان}}$$

$$V_1 I_1 = V_2 I_2$$

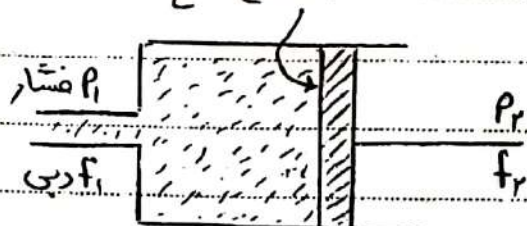
مثال) سیستم زیر مثالی از یک تراش دیوسر است که در آن انرژی از نوع سیالاتی

به مکانیکی و بالعکس تبدیل می شود رابطه ای را بین P_1 و f_1 با P_2 و f_2 بنویسید اگر:

(I) P_1 نیرو و f_1 سرعت فرض شود

(II) P_2 سرعت و f_2 نیرو فرض شود

A سطح مقطع



$$F_r = v, P_r = F \text{ (حالت I)}$$

$$F = P_r A \rightarrow P_r = P_r A \Rightarrow P_r = \frac{1}{A} P_r$$

$$Q = v A \rightarrow f_r = f_r A$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} P_r \\ f_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{A} & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_r \\ f_r \end{bmatrix}$$

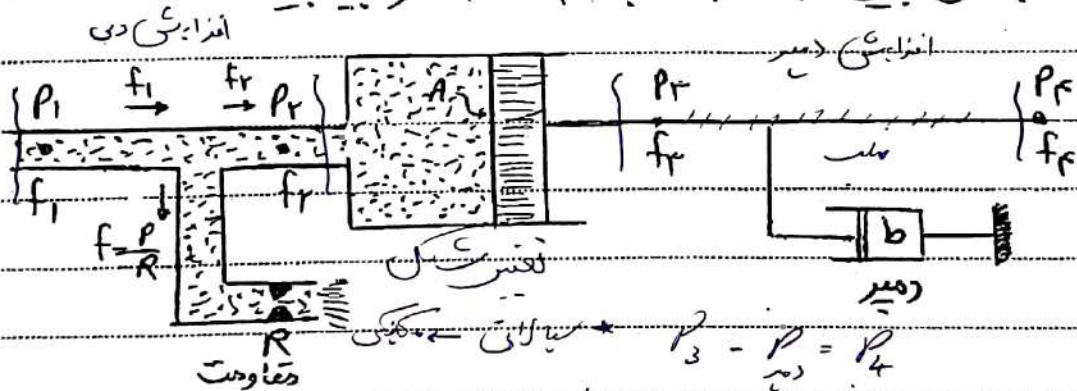
$$f_r = F, P_r = v \text{ (حالت II)}$$

$$F = P_r A \rightarrow f_r = P_r A \Rightarrow P_r = \frac{f_r}{A}$$

$$Q = v A \rightarrow f_r = P_r A$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} P_r \\ f_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{A} \\ A & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_r \\ f_r \end{bmatrix}$$

مثال) در سیستم نشان داده شده در زیر که نمونه ای از یک تراش ریوسر است رابطه بین P_r و f_r با P_r و f_r را بیابید.



$$\begin{aligned} & P_1 = P_2 \quad \text{و} \quad f_1 = f_2 \\ & P_3 - P_4 = P_5 \\ & \Rightarrow \begin{cases} P_1 = P_2 \\ f_1 - f_2 = \frac{P_2}{R} \end{cases} \Rightarrow f_1 = f_2 + \frac{P_2}{R} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} P_r \\ f_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{R} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_r \\ f_r \end{bmatrix}$$

$$P_2(t) = P_2(t) A \quad \checkmark$$

$$F = P_2 A$$

نیرو P_r و فشار f_r $\Rightarrow$ $\begin{cases} P_r = \frac{1}{A} P_r \\ f_r = A f_r \end{cases} \quad \checkmark$

مکانیکی $\Rightarrow \begin{bmatrix} P_r \\ f_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{A} & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_r \\ f_r \end{bmatrix}$ $Q = PVA$
 $f_2 = f_3 A \quad \checkmark$

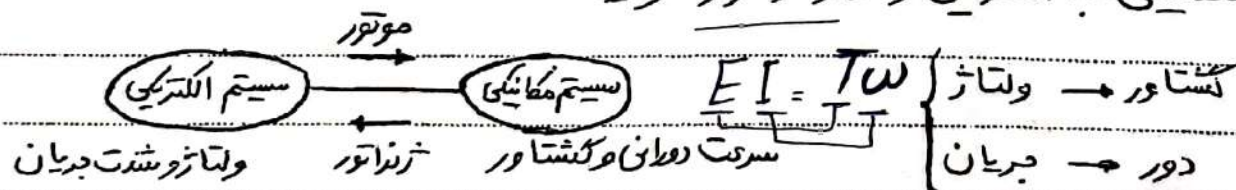
نیرو P_r و نیرو P_c $\Rightarrow \begin{cases} f_r = f_c \\ P_r - P_c = b f_c \Rightarrow P_r = b f_c + P_c \end{cases}$

مکانیکی $\Rightarrow \begin{bmatrix} P_r \\ f_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_c \\ f_c \end{bmatrix} \quad \checkmark$

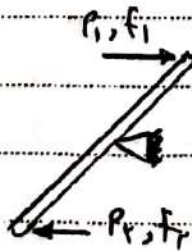
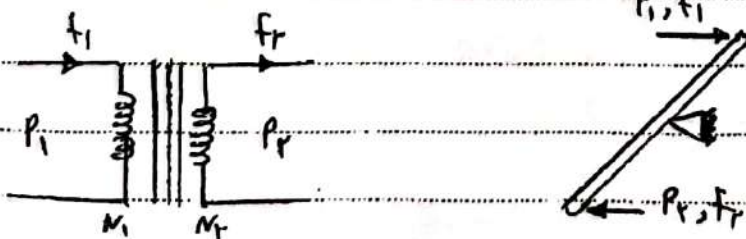
$\Rightarrow \begin{bmatrix} P_1 \\ f_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{R} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{A} & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_c \\ f_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{A} & \frac{b}{A} \\ \frac{1}{RA} & \frac{b}{RA} + A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_c \\ f_c \end{bmatrix} \quad \checkmark$

نکته:

در ترانس دیویدرها مدل انرژی الکتریکی به مکانیکی دوران را «موتور» و مدل انرژی مکانیکی به الکتریکی را «ژنراتور» گویند.



مثال) در اشکال زیر که نمونه هایی از ترانسفورماتور هستند رابطه P_1, f_1 را با P_2, f_2 بیابید.



با توجه به P, f در شکل سمت راست می توان مدل سازی را به صورت زیر انجام می دهیم.

$f = F$ نیرو & $P = V$ سرعت

$T_1 = T_2$

زمانی که کشش ثابت است: $T = cte \Rightarrow r_1 F_1 = r_2 F_2$

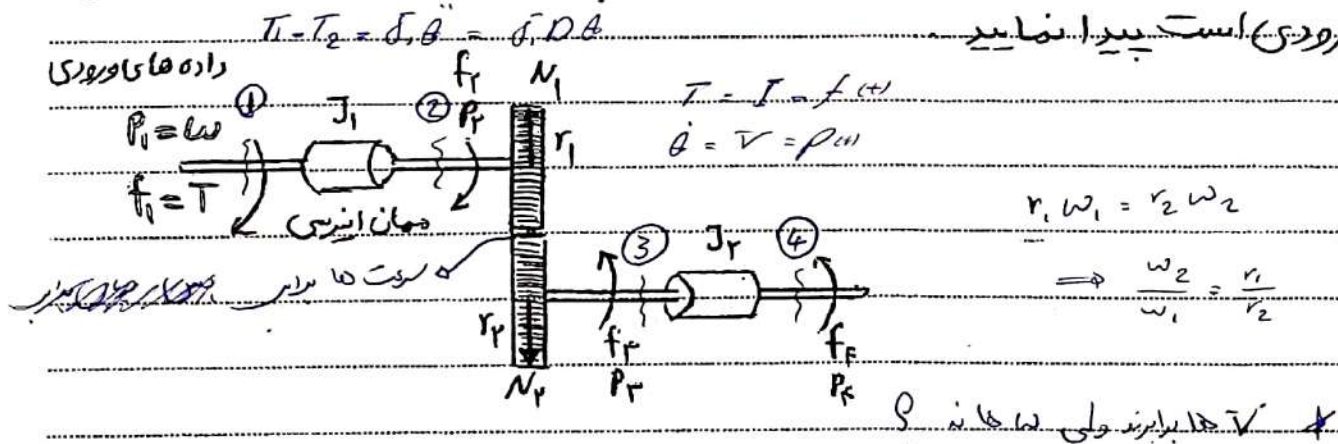
$f_1 \times a = f_2 \times b \Rightarrow f_1 = \frac{b}{a} f_2$

زمانی که سرعت زاویه ای ثابت است: $\omega = cte \Rightarrow \frac{v_1}{r_1} = \frac{v_2}{r_2}$

$\frac{P_1}{a} = \frac{P_2}{b} \Rightarrow P_1 = \frac{a}{b} P_2$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} P_1 \\ f_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a}{b} & 0 \\ 0 & \frac{b}{a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_2 \\ f_2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{نسبت تبدیل}]{r = \frac{a}{b}} \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_2 \\ f_2 \end{bmatrix}$

مثال) در چرخ دنده‌ی شکل زیر که هر کدام دارای همان اینرسی J می باشند این سیستم نمونه ای از یک تراش قورماتور است. رابطه ی بین P_1, f_1 را با P_2, f_2 بیابید و سپس رابطه ی f_1 را با P_1 که همان سرعت زاویه ای ورودی است پیدا کنید.



نسبت چرخ دنده ها: $r = \frac{N_2}{N_1} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{\omega_1}{\omega_2}$

$\Sigma M = I \ddot{\theta} \Rightarrow T_1 - T_2 = J_1 \ddot{\theta} = J_1 D \dot{\theta}$

موازى $f_1 - f_2 = J_1 D P_1 = J_1 D P_2$

$\begin{bmatrix} P_1 \\ f_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ J_1 D & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_2 \\ f_2 \end{bmatrix}$

سرعت زاویه ای ها برابرند



در این قسمت که قسمت انتقال چرخ دنده ها است داریم:

I) $r = cte$ or $rw = cte$: برابری سرعت خطی نقطه‌ای تماس

$$r_1 \omega_1 = r_2 \omega_2 \Rightarrow r_1 p_1 = r_2 p_2 \Rightarrow \frac{p_2}{p_1} = \frac{r_1}{r_2} = r$$

$$r_1 \omega_1 = r_2 \omega_2 \quad ?$$

II) $p = cte$ or $T\omega = cte$: برابری توان در نقطه‌ای تماس

$$T_1 \omega_1 = T_2 \omega_2 \Rightarrow f_1 p_1 = f_2 p_2 \Rightarrow \frac{f_2}{f_1} = \frac{p_1}{p_2} = \frac{1}{r}$$

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ f_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_2 \\ f_2 \end{bmatrix}$$

و در نهایت برای قسمت آخر خواهیم داشت:

$$\Sigma M = I \ddot{\theta} \Rightarrow T_1 - T_2 = I_1 \ddot{\theta} = I_1 D \ddot{\theta}$$

$$f_1 - f_2 = I_1 D p_1 = I_1 D p_2$$

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ f_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ I_1 D & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_2 \\ f_2 \end{bmatrix}$$

در نتیجه از ضرب ماتریس ها در هم خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ f_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ I_1 D & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ I_2 D & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_2 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r & 0 \\ (r I_1 + \frac{I_2}{r}) D & \frac{1}{r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_2 \\ f_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} p_1 = \frac{1}{r} p_2 \\ f_1 = (r I_1 + \frac{I_2}{r}) D p_2 + \frac{1}{r} f_2 \end{cases} \rightarrow p_2 = \frac{1}{r} p_1 = \frac{1}{r} \omega = \frac{1}{r} D \theta$$

$$f_1 = (r I_1 + \frac{I_2}{r}) D p_2 + \frac{1}{r} f_2$$

$$\Rightarrow f_1 = (r I_1 + \frac{I_2}{r}) D \cdot \frac{1}{r} D \theta + \frac{1}{r} f_2$$

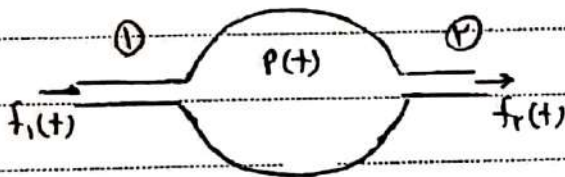
$$f_1 = (I_1 + \frac{I_2}{r^2}) D^2 \theta + \frac{1}{r} f_2$$

توجه:

$$\frac{J \text{ شفت مقصد}}{J \text{ شفت مبدا}} = \left(\frac{\text{تعداد چرخ زنده های مقصد}}{\text{تعداد چرخ زنده های مبدا}} \right)^2$$

سیستم های گازی:

در سیستم های گازی هم است سیستم های سیالاتی که قبلاً در مورد آنها صحبت کردیم. فشار را معادل پتانسیل $P(t)$ در نظر می گیریم ولی از آنجایی که دانسته گازها همواره تغییر می کنند در این سیستم ها به جای دبی جرمی، دبی جرمی را معادل جریان $f(t)$ قرار می دهیم. مخزن ها به شکل زیر در نظر بگیریم:



$$\begin{cases} \dot{m} = f(t) \\ P_{\text{شار}} = P(t) \end{cases}$$

تغییرات جرم مخزن برابر است با:

$$\frac{d}{dt} m = f_1 - f_2$$

از طرفی می دانیم:

$$m = \frac{\gamma}{\nu} \quad \begin{matrix} \text{جرم مخزن} \\ \text{حجم مخصوص} \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} m = \frac{d}{dt} \frac{\gamma}{\nu} = \gamma \frac{d}{dt} \frac{1}{\nu} = -\frac{\gamma}{\nu^2} \frac{d\nu}{dt} = -\frac{\gamma}{\nu^2} \left(\frac{d\nu}{dp} \cdot \frac{dp}{dt} \right)$$

از طرفی برای یک سیال پلی تروپیک رابطه ای به صورت زیر خواهیم داشت:

$$p \nu^n = cte \quad \text{پلی تروپیک}$$

$$\Rightarrow \nu^n dp + n \nu^{n-1} p d\nu = 0 \Rightarrow \frac{d\nu}{dp} = -\frac{\nu}{np}$$

و در نهایت داریم:

$$f_1 - f_2 = -\frac{\gamma}{\nu^2} \left(-\frac{\nu}{np} \frac{dp}{dt} \right) = \frac{\gamma}{n\nu p} \frac{dp}{dt} = \frac{\gamma}{n\nu p} DP$$

که با معادل سازی با مدارهای الکتریکی داریم:

$$f_1 - f_2 = CDP$$

$$\Rightarrow C = \frac{V}{nVP}$$

از طرفی برای یک گاز ایده آل داریم:

$$PV = RT$$

بنابراین معادل خازن سیستم‌های گازی برابر است با:

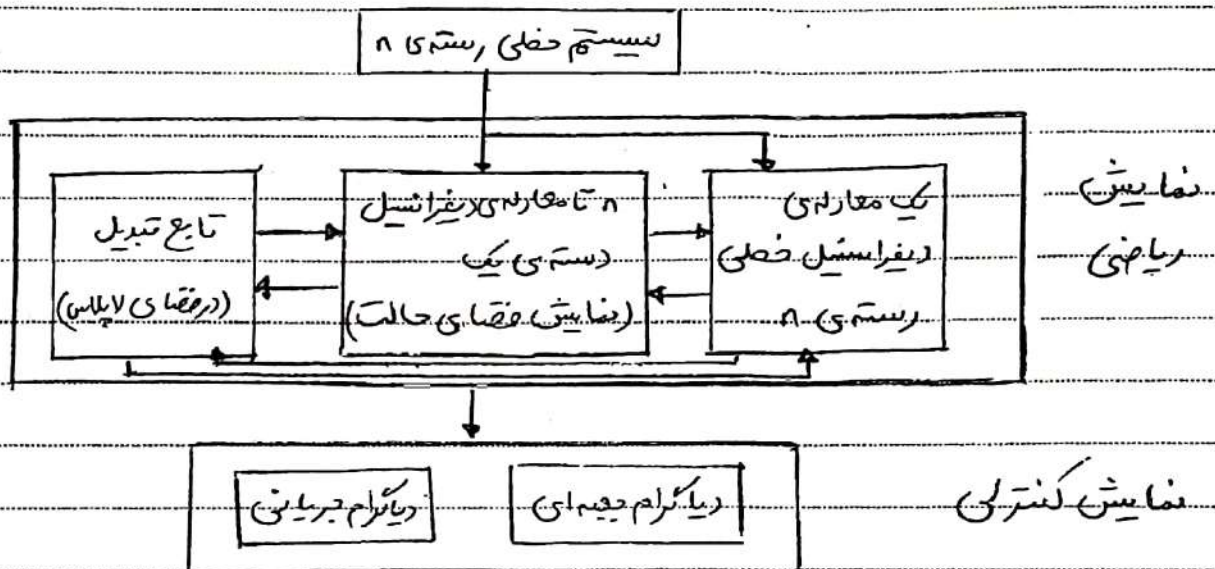
$$C = \frac{V}{nRT}$$

که چنانچه فرض کنید هم γ (یا ثابت) باشد در این صورت $n=1$ و مقدار T نیز ثابت بوده و لذا خازن C خطی خواهد بود.

« فصل سوم »

نمایش سیستم‌های دینامیکی

مجموعه کلی نمایش ریاضی و ترسیم یک سیستم خطی رسته n پویا به صورت زیر می باشد.

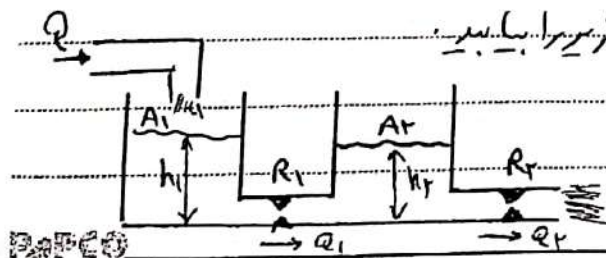


معادله ی برداری فضای حالت:

معادله ی برداری حالت نوعی نمایش یا مدل ریاضی برای یک سیستم است که در آن به جای نمایش سیستم به وسیله ی یک معادله ی دیفرانسیل رسته ی n ، سیستم را با « n معادله ی دیفرانسیل خطی رسته ی یک» یا « n معادله ی دیفرانسیل خطی رسته ی یک برداری» نمایش می دهند.

I. معادله ی برداری فضای حالت برای سیستمی با یک ورودی و یک خروجی: با یک مثال به توضیح این بخش می پردازیم.

مثال) معادله ی برداری فضای حالت سیستم زیر را بیابید.



Page 26

Sina SD619

همان طوری که در فصل قبل هم گفتیم:

دبی خروجی - دبی ورودی = تغییرات حجم مایع نسبت به زمان

به عبارتی دیگر:

$$\frac{d}{dt}(V) = Q_{in} - Q_{out}$$

یا با توجه به اینکه $V = Ah$ و $A = cte$ است:

$$A \frac{dh}{dt} = Q_{in} - Q_{out}$$

* قبلاً گفتیم که بهتر است همواره جریان را از بالا دست به سمت پایین دست در نظر بگیریم یعنی همیشه فرض کنیم $h_1 > h_2$ است پس داریم:

$$\text{طرف ۱: } A_1 \frac{dh_1}{dt} = Q - \left(\frac{h_1 - h_r}{R_1} \right)$$

$$\text{طرف ۲: } A_2 \frac{dh_2}{dt} = \left(\frac{h_1 - h_r}{R_1} \right) - \left(\frac{h_r - 0}{R_2} \right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{طرف ۱: } \frac{dh_1}{dt} = -\frac{h_1}{R_1 A_1} + \frac{h_r}{R_1 A_1} + \frac{Q}{A_1} \\ \text{طرف ۲: } \frac{dh_r}{dt} = \frac{h_1}{R_1 A_r} - \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \frac{h_r}{A_r} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1 A_1} & \frac{1}{R_1 A_1} \\ \frac{1}{R_1 A_r} & -\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \frac{1}{A_r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{A_1} \\ 0 \end{bmatrix} Q$$

input = ورودی u

از طرفی خروجی سیستم برابر است با:

$$y = \frac{h_r - 0}{R_2} = \frac{h_r}{R_2}$$

$$\Rightarrow y = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{R_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} Q$$

C x D u

input = ورودی

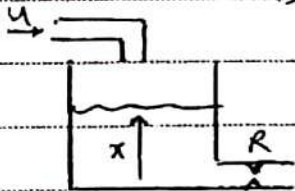
بنابراین نمایش فضای حالت برای یک سیستم با یک ورودی و یک خروجی به صورت زیر است.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

برای سیستمی با یک ورودی و یک خروجی SISO

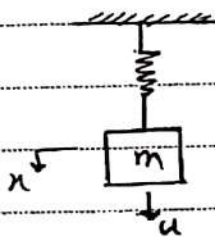
 $n \times 1$
 $A_{n \times n}$
 $B_{n \times 1}$
 $C_{1 \times n}$
 $D_{1 \times n}$

مثال) برای سیستم زیر نمایش فضای حالت را بنویسید



$$\begin{cases} A\dot{x} = u - \frac{x}{R} \\ y = \frac{x}{R} + u \end{cases}$$

مثال) نمایش فضای حالت سیستم جرم و فنر شکل زیر را بنویسید



قبلاً در درس ارتعاشات آموختیم که پاسخ چنین سیستمی

به صورت $m\ddot{x} + kx = u(t)$ است

که پاسخ $x(t)$ آن با توجه به شرایط اولیه x_0 و $\dot{x}_0$ به

صورت $x(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t$ می باشد که A و B مقادیری

ثابت و بسته به مقادیر x_0 و $\dot{x}_0$ هستند.

حال برای نمایش فضای حالت تغییر مکان x و سرعت $\dot{x}$ جرم m را به عنوان متغیرهای حالت در نظر می گیریم زیرا بارانشن این دو متغیر رفتار سیستم کاملاً مشخص است

$$\begin{cases} x_1 = x \rightarrow \dot{x}_1 = \dot{x} = x_2 \\ x_2 = \dot{x} \rightarrow \dot{x}_2 = \ddot{x} \end{cases}$$

$$\Rightarrow m \ddot{x} + kx = u(t) \rightarrow m \ddot{x}_r + kx_1 = u(t)$$

$$\Rightarrow \ddot{x}_r = \frac{1}{m} [-kx_1 + u(t)] = -\frac{k}{m} x_1 + \frac{1}{m} u(t)$$

خروجی این سیستم نیز همان تغییر مکان جرم m در اثر ورودی است بنابراین

$$y(t) = x(t) = x_1$$

بنابراین نمایش فضای حالت این سیستم برابر است با:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{d}{dt} x_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{d}{dt} x_2 = -\frac{k}{m} x_1 + \frac{1}{m} u(t) \\ y = x_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu & \textcircled{1} \\ y = Cx + du & \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\textcircled{1} \Rightarrow \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u$$

$$\textcircled{2} \Rightarrow y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u$$

(II) معادله‌ی برداری فضای حالت برای سیستمی با چند ورودی و چند خروجی:

در این حالت نیز نمایش فضای حالت به صورت زیر است:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} x(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

که در آن:

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \quad u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_r(t) \end{bmatrix}, \quad y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{bmatrix}$$

و ماتریس‌های A , B , C و D به صورت زیرند:

$$A_{n \times n} \quad B_{n \times r} \quad C_{m \times n} \quad D_{m \times r}$$

تبدیل لاپلاس:

برای آنکه تابعی مانند $f(t)$ در میدان زمان را بتوان به تابع نظیر آن در میدان لاپلاس تبدیل نمود، این تابع به ازای یک مقدار σ حقیقی و مثبت باید شرط زیر را ارضا کند:

$$\int_0^{\infty} |f(t)e^{-\sigma t}| dt < \infty$$

تبدیل لاپلاس $F(s)$ از یک تابع $f(t)$ که شرط فوق را داراست به صورت زیر تعریف می شود:

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

توجه:

با جای گذاری $s = \sigma + j\omega$ در فرمول لاپلاس می توان انتگرال فوریه را بدست آورد. از طرفی اگر بتوانیم انتگرال فوق را به گونه ای بشکنیم (تکه تکه کنیم) می توان تابع فوق را به صورت یک تابع فوریه درآورد.

لاپلاس چند تابع خاص:

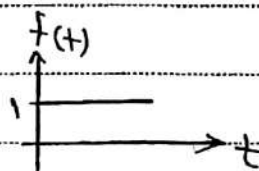
۱. تابع e^{-dt}

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-dt} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-(d+s)t} dt$$

$$= \left. \frac{-e^{-(d+s)t}}{d+s} \right|_0^{\infty} = \frac{-1}{d+s} (e^{\infty} - e^0) = \frac{1}{d+s}$$

۲. تابع پله واحد

$$f(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

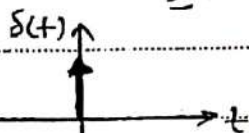


$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \left. -\frac{1}{s} e^{-st} \right|_0^{\infty} = -\frac{1}{s} (e^{\infty} - e^0) = \frac{1}{s}$$

۳. تابع ضربی واحد

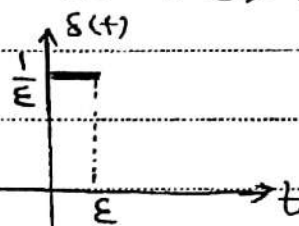
نمایش این تابع به صورت زیر است:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ \infty & t = 0 \end{cases}$$



که برای آنکه بتوان از تابع فوق لاپلاس گرفت، این تابع را به صورت ملموس تر می توان به صورت زیر نمایش داد.

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ 0 & t \geq \epsilon \\ \frac{1}{\epsilon} & 0 < t < \epsilon \end{cases}$$



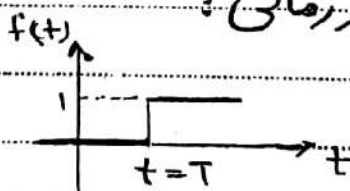
«epsilon یک مقدار بسیار بسیار کوچک است که به سمت صفر میل می کند»

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^{\epsilon} \frac{1}{\epsilon} e^{-st} dt = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[-\frac{1}{s\epsilon} e^{-st} \right]_0^{\epsilon} \\ = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{s\epsilon} [e^{-s\epsilon} - e^0] \right) = 0$$

$$F(s) \xrightarrow[\text{هویتال}]{\text{Hop}} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{s e^{-\epsilon s}}{s} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} e^{-\epsilon s} = e^0 = 1$$

۴. تابع پله واحد با تأخیر زمانی

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < T \\ 1 & t \geq T \end{cases}$$



$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt = \int_0^T 0 dt + \int_T^{\infty} 1 \cdot e^{-st} dt$$

$$t = v + T \rightarrow dt = dv \quad \left\{ \begin{array}{l} t=T \rightarrow v=0 \\ t=\infty \rightarrow v=\infty \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow F(s) = \int_0^{\infty} e^{-s(v+T)} dv = e^{-sT} \int_0^{\infty} e^{-sv} dv = \frac{-1}{s} e^{-sT} \left(e^{\infty} - e^0 \right) = \frac{1}{s} e^{-sT}$$

۵. مشتق یک تابع

$$L\left[\frac{d}{dt}f(t)\right] = \int_0^{\infty} f'(t) e^{-st} dt$$

که با استفاده از روش جزء به جزء داریم:

$$dv = f'(t) dt \rightarrow v = f(t)$$

$$u = e^{-st} \rightarrow du = -s e^{-st} dt$$

$$uv - \int v du = f(t) e^{-st} \Big|_0^{\infty} + s \int e^{-st} f(t) dt$$

$$\Rightarrow L\left[\frac{d}{dt}f(t)\right] = f(\infty) \cdot 0 - f(0) \cdot 1 + s F(s) = -f(0) + s F(s)$$

حال برای مشتقات مرتب بالاتر داریم:

$$L\left[\frac{d^2}{dt^2}f(t)\right] = s^2 F(s) - s f(0) - f'(0)$$

و حالت کلی آن:

$$L\left[\frac{d^n}{dt^n}f(t)\right] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$$

۶. انتگرال یک تابع:

$$L\left[\int f(t) dt\right] = \frac{1}{s} F(s) + \frac{1}{s} f^{(-1)}(0)$$

که در آن $f^{(-1)}(t)$ انتگرال $f(t)$ است

نکته:

زمانی که معادلات دیفرانسیل از میدان زمان به میدان لاپلاس تبدیل می شوند

معادلات به صورت معادلات جبری درمی آیند.

مثال) مثال جرم و فنر صفحه ای ۲۸ را تحت تبدیل لاپلاس حل کنید.

$$m\ddot{x} + kx = u(t)$$

$$X(s) = L[x(t)] \quad \& \quad U(s) = L[u(t)] \quad \& \quad x(0) = x_0$$

$$L[m\ddot{x} + kx = u(t)]$$

$$\Rightarrow m(s^2 X(s) - s x(0) - \dot{x}(0)) + kX(s) = U(s)$$

$$\Rightarrow (ms^2 + k)X(s) = msx_0 + m\dot{x}_0 + U(s)$$

$$\Rightarrow X(s) = \underbrace{\frac{1}{ms^2 + k} U(s)}_{\text{کنترل}} + \underbrace{\frac{ms}{ms^2 + k} x_0 + \frac{m}{ms^2 + k} \dot{x}_0}_{\text{ارتعاشات}}$$

توجه:

آن چیزی که در سیستم های کنترلی مهم است ورودی سیستم است که قرار است مطابق با آن رفتار سیستم مشخص شود و قسمت هایی که دارای شرایط اولیه هستند مربوط به ارتعاشات می شوند که در کنترل مد نظر قرار نمی گیرند به همین خاطر در کنترل شرایط اولیه سیستم فوق را حذف در نظر می گیریم
 $x(0) = x_0 = 0 \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0 = 0$

$$\Rightarrow \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{1}{ms^2 + k} = G_p(s) \quad X(s) = Y(s) \text{ خروجی سیستم}$$

که به $G_p(s)$ تابع تبدیل سیستم یا «Transfer function» or «Tf» گویند که برای سیستمی با یک ورودی و یک خروجی عبارت از نسبت تبدیل لاپلاس خروجی به تبدیل لاپلاس ورودی وقتی که تمامی شرایط

اولیه سیستم برابر صفر هستند

تابع تبدیل سیستم از معادلات حالت (یک ورودی - یک خروجی) :
همان طور که قبلاً گفتیم نمایش فضای حالت به طور کلی به صورت زیر است :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu & (1) \\ y = Cx + Du & (2) \end{cases}$$

که با لاپلاس گرفتن از روابط فوق خواهیم داشت :

$$X(s) = L[x(t)] \quad Y(s) = L[y(t)] \quad U(s) = L[u(t)]$$

$$(1) \quad sX(s) - x(0) = AX(s) + BU(s)$$

$$(sI - A)X(s) = BU(s) - x(0)$$

چنانچه در رابطه ی فوق شرط اولیه صفر در نظر گرفته شود :

$$x(0) = 0 \rightarrow X(s) = (sI - A)^{-1}BU(s)$$

در نتیجه :

$$(2) \quad Y(s) = [C(sI - A)^{-1}B + D]U(s)$$

$$\Rightarrow G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1}B + D$$

که به معادله ی فوق تابع تبدیل بین ورودی $U(s)$ و خروجی $Y(s)$ گویند.

نکته :

اگر D دارای مقدار باشد کنترل کردن این سیستم ها مشکل خواهد بود به همین خاطر در اکثر سیستم ها D وجود ندارد.

از تابع تبدیل بدست آمده معادله ی مشغله سیستم مشخص می گردد زیرا می دانیم که :

$$(SI - A)^{-1} = \frac{\text{adj}(SI - A)}{\det(SI - A)} \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{ماتریس الحاقی} \\ \text{دترمینان ماتریس} \\ \text{(یک چندجمله‌ای بر حسب S)} \end{array}$$

و در نتیجه:

$$G(s) = \frac{C \text{adj}(SI - A)B + D \det(SI - A)}{\det(SI - A)}$$

و از آنجایی که $\det(SI - A)$ در مخرج کسر قرار دارد، معادله‌ی مشخصه‌ی سیستم خواهد بود.

$$\det(SI - A) = 0 \quad \text{معادله‌ی مشخصه}$$

که به ریشه‌های S بدست آمده از رابطه‌ی فوق قطب گویند.

نکته:

برای محاسبه‌ی ماتریس الحاقی باید از فرمول کلی زیر استفاده کنیم:

* در اینجا یک ماتریس 3×3 محاسبه شده که برای ماتریس‌های بالاتر نیز باید به همین روش عمل کرد.

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{bmatrix} \quad C_{ij} = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} \text{دترمینان ماتریس} \\ \text{حاصل از حذف} \\ \text{سطر i و ستون j} \end{vmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{ماتریس الحاقی}} C^T = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{bmatrix}$$

* برای یک ماتریس 2×2 برای بدست آوردن ماتریس الحاقی تنها کافی است که جای درآیه‌های قطر اصلی را عوض کرده و درآیه‌های قطر فرعی را قرینه نمود.

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{الحاقی}]{\text{ماتریس}} C^T = \text{adj } A = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

در میان یک ماتریس 3×3 و 2×2 نیز به صورت زیر است:

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = a(ek - hf) - b(dk - gf) + c(dh - eg)$$

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = ad - bc$$

مثال) تابع تبدیل سیستم جرم و فنری که در مثال مفهومی ۲۸، ۳۳ به صورت آن صحبت کردیم را بدست آورید.

* در آن مثال دیدیم که:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ m \end{bmatrix}, C = [1 \quad 0], D = [0]$$

$$\Rightarrow (SI - A) = s \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ \frac{k}{m} & s \end{bmatrix}$$

برای آنگاه نشان دهیم ماتریس الحاقی چگونه بدست می آید از فرمول کلی مفهومی قبل استفاده می کنیم:

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} = (-1)^{1+1} S & C_{12} = (-1)^{1+2} \frac{k}{m} \\ C_{21} = (-1)^{2+1} (-1) & C_{22} = (-1)^{2+2} S \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow C = \begin{bmatrix} S & -\frac{k}{m} \\ +1 & S \end{bmatrix} \Rightarrow C^T = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} \\ C_{12} & C_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S & 1 \\ -\frac{k}{m} & S \end{bmatrix}$$

که اگر به ماتریس $(SI - A)$ توجه شود مشخص است که جای (برآینه های قطر اصلی) عوض شده و درآینه های قطر فرعی قرینه شده اند. (فقط ماتریس 2×2)

$$\det(SI - A) = s^2 + \frac{k}{m} = \frac{ms^2 + k}{m}$$

$$G(s) = C (sI - A)^{-1} B + D = C \frac{\text{adj}(sI - A) B}{\det(sI - A)}$$

$$= [1 \ 0] \frac{\begin{bmatrix} s & -1 \\ k & s \end{bmatrix}}{\frac{ms^2 + k}{m}} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} = \frac{\frac{1}{m}}{\frac{ms^2 + k}{m}} = \frac{1}{ms^2 + k}$$

قطب‌ها و صف‌های سیستم:

$$G(s) = \frac{B(s)}{A(s)}$$

$$\text{If } A(s) = 0$$

ریشه‌های $A(s)$ را قطب‌های سیستم یا Pole گویند که در واقع $A(s) = \det(sI - A)$ است.

$$\text{If } B(s) = 0$$

ریشه‌های $B(s)$ را صف‌های سیستم یا Zero گویند.

مثال) در یک معادله‌ی فضای حالت که مقادیر A , B , C و D به صورت زیر هستند، نشان دهید که این معادله دارای ضربین‌ها نیست.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = [1 \ -1] \quad D = 0$$

* تنها کافی است تابع تبدیل سیستم را بدست آوریم:

$$sI - A = s \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s+2 & -1 \\ -1 & s+2 \end{bmatrix}$$

$$(sI - A)^{-1} = \frac{\text{adj}(sI - A)}{\det(sI - A)} = \frac{1}{\begin{vmatrix} s+2 & -1 \\ -1 & s+2 \end{vmatrix}} \begin{bmatrix} s+2 & 1 \\ 1 & s+2 \end{bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} s+2 & 1 \\ 1 & s+2 \end{bmatrix}}{(s+2)^2 - 1}$$

قرینه ↗ ↘ قرینه

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

$$= \frac{1}{s^2 + 4s + 3} \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+2 & 1 \\ 1 & s+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{s+1}{s^2 + 4s + 3} = \frac{s+1}{(s+1)(s+3)} = \frac{1}{s+3}$$

این مدل در خروجی مشخص نمی شود ولی در جایی از سیستم در حال انجام کار است
 مخفیانه Hidden mode: که از جمله قطره ناک ترین عواملی است که باعث مشکل برای سیستم های کنترلی می شود

نمایش ترسیمی سیستم های خطی پیوسته:

روش نمایش ترسیمی برای سیستم ها وجود دارد:

۱. نمایش جعبه ای Block diagram

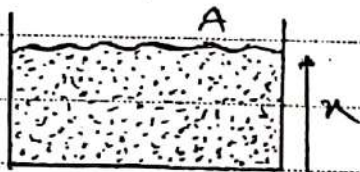
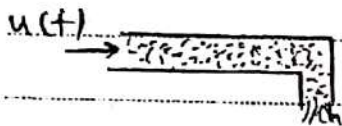
۲. نمایش جریان flow diagram

که در رشته های مکانیک بیشتر به نمایش جعبه ای توجه می شود و نمایش جریان بیشتر حالت برقی و الکترونیکی دارد

موضوع نمایش	دیاگرام جعبه ای	دیاگرام جریان
سیگنال	→	○
تابع	فقط مقدار مثبت داخل آن نوشته می شود	$\frac{1}{s}$ or $\frac{1}{D}$ استثنای
عملیات (جمع و تفریق)	رایج تر	فقط مثبت وارد می شود

نمایش ترسیمی یک سیستم خطی رسته ای یک

مثال) نمایش ترسیمی سیستم زیر را در میان زمان و لاپلاس به صورت دیاگرام بیه ای و جریان رسم کنید

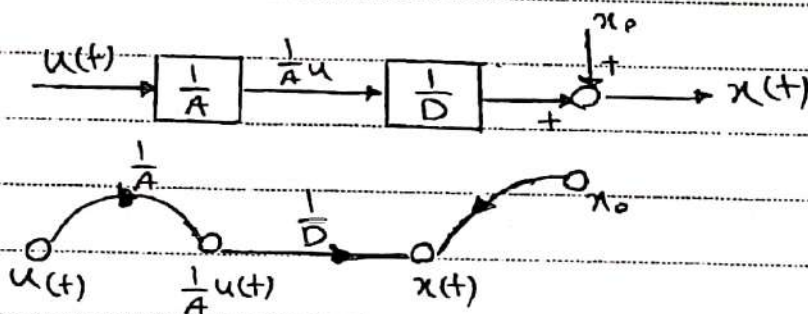


$$A \frac{dx}{dt} = u(t) \Rightarrow \dot{x} = \frac{1}{A} u(t)$$

میان زمان»

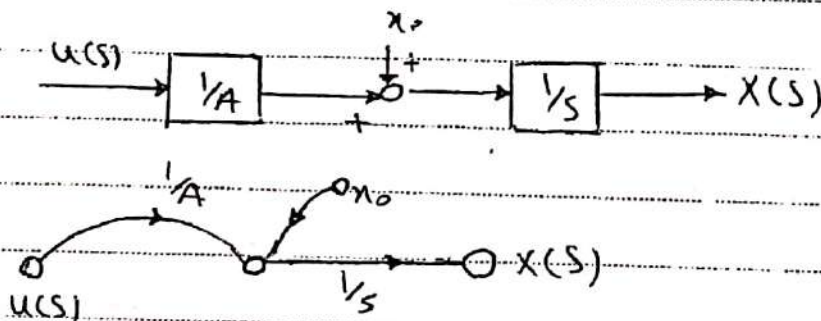
$$Dx = \frac{1}{A} u \rightarrow x = x_0 + \frac{1}{D} \cdot \frac{1}{A} u(t)$$

انتگرال

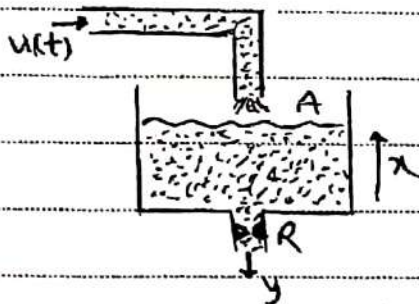


میان لاپلاس»

$$A(sX(s) - x_0) = U(s) \rightarrow X(s) = \left(\frac{1}{A} U(s) + x_0 \right) \frac{1}{s}$$



مثال) نمایش ترسیمی سیستم زیر را در میان لاپلاس به صورت دیاگرام بیه ای و جریان رسم کنید

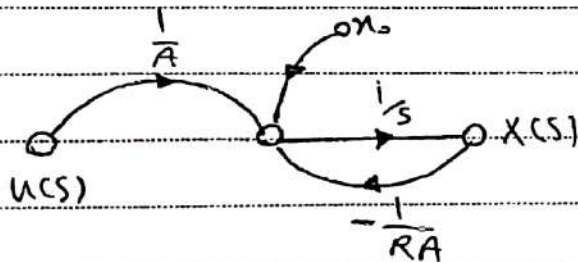
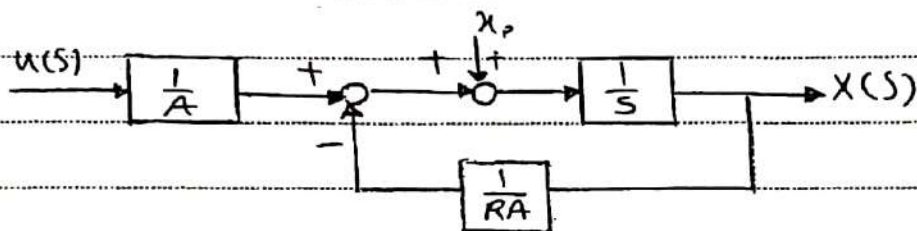


$$A \dot{x} = u(t) - \frac{x}{R}$$

$$A (sX(s) - x_0) = U(s) - \frac{X(s)}{R}$$

$$sX(s) - x_0 = \frac{1}{A} U(s) - \frac{X(s)}{RA}$$

$$\Rightarrow X(s) = \frac{1}{s} \left[\frac{1}{A} U(s) - \frac{X(s)}{RA} + x_0 \right]$$



نمایش ترسیمی یک سیستم خطی رسته n با یک ورودی و یک خروجی.

مثال) نمایش جعبه ای معادلاتی حالت زیر را در مداران لاپلاس رسم کنید.

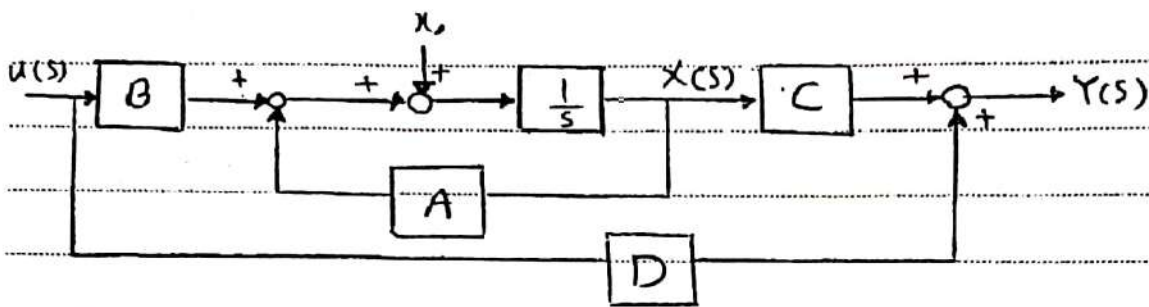
$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

$$x(0) = x_0$$

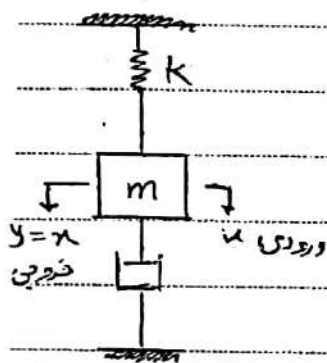
$$sX(s) - x_0 = AX(s) + BU(s)$$

$$\Rightarrow X(s) = \frac{1}{s} [AX(s) + BU(s) + x_0]$$

$$\Rightarrow Y(s) = CX(s) + DU(s)$$



مثال) نمایش دیاگرام جعبه ای و جریان برای سیستم جرم-فنر - (میدان) را رسم کنید. (دیاگرام جعبه ای را در میدان لاپلاس و جریان را در میدان زمان رسم کنید)



$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = u(t)$$

نقشه های حالت را در این سیستم تغییر مکان و سرعت در نظر می گیریم

$$x_1 = x \rightarrow \dot{x}_1 = \dot{x} = x_2$$

$$x_2 = \dot{x} \rightarrow \dot{x}_2 = \ddot{x}$$

$$\Rightarrow m\dot{x}_2 + b x_2 + k x_1 = u(t)$$

در نتیجه معادلات برابرند:

$$\begin{cases} \textcircled{1} \dot{x}_1 = x_2 \\ \textcircled{2} \dot{x}_2 = -\frac{b}{m} x_2 - \frac{k}{m} x_1 + \frac{1}{m} u(t) \\ \textcircled{3} y = x_1 \end{cases}$$

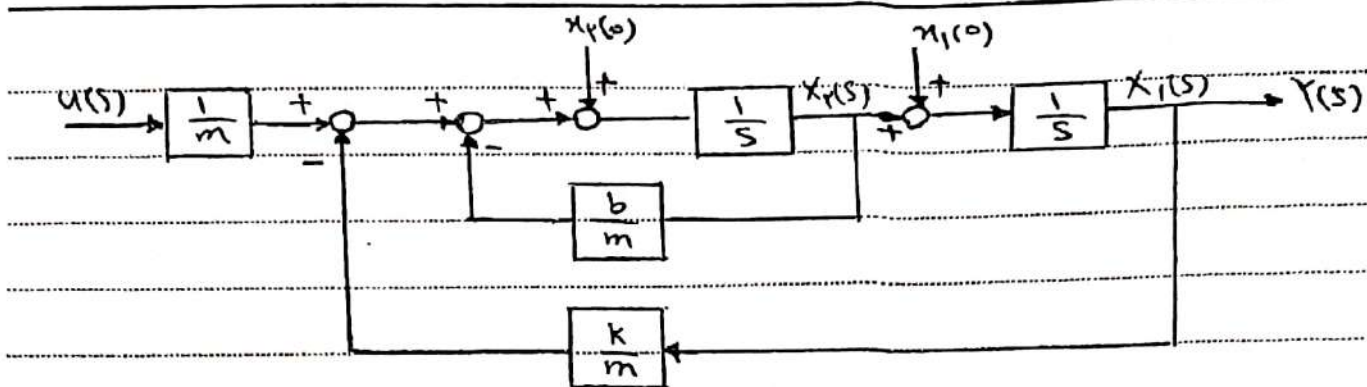
میدان لاپلاس و نمایش جعبه ای:

$$sX_1(s) - x_1(0) = X_2(s) \rightarrow X_1(s) = \frac{1}{s} (X_2(s) + x_1(0)) \quad \textcircled{1}$$

$$sX_2(s) - x_2(0) = -\frac{b}{m} X_2(s) - \frac{k}{m} X_1(s) + \frac{1}{m} U(s) \quad \textcircled{2}$$

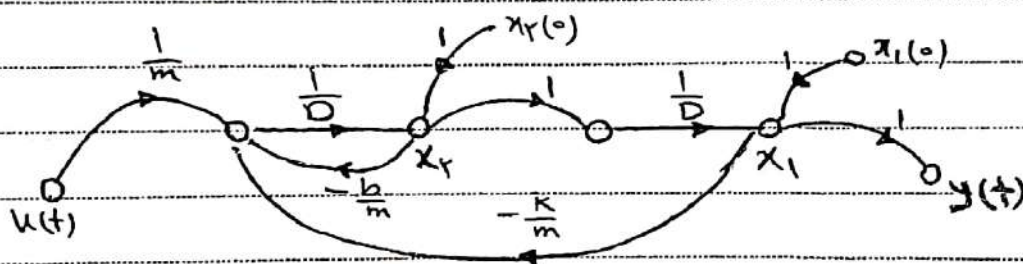
$$\rightarrow X_2(s) = \frac{1}{s} \left(-\frac{k}{m} X_1(s) - \frac{b}{m} X_2(s) + \frac{1}{m} U(s) + x_2(0) \right)$$

$$Y(s) = X_1(s) \quad \textcircled{3}$$



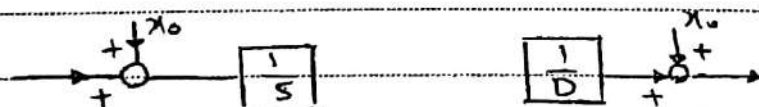
میدان زمان و نمایش جریان:

$$\begin{aligned} D x_1 &= x_r \rightarrow x_1 = \frac{1}{D} x_r + x_1(0) \quad (1) \\ D x_r &= -\frac{b}{m} x_r - \frac{k}{m} x_1 + \frac{1}{m} u(t) \rightarrow x_r = \frac{1}{D} \left(-\frac{b}{m} x_r - \frac{k}{m} x_1 + \frac{1}{m} u \right) + x_r(0) \quad (2) \\ y &= x_1 \quad (3) \end{aligned}$$



نکته:

۱. فرق نمایش در میدان لاپلاس و زمان فقط در محل قرار گرفتن ورودی $x(0)$ است.



«میدان زمان» «میدان لاپلاس»

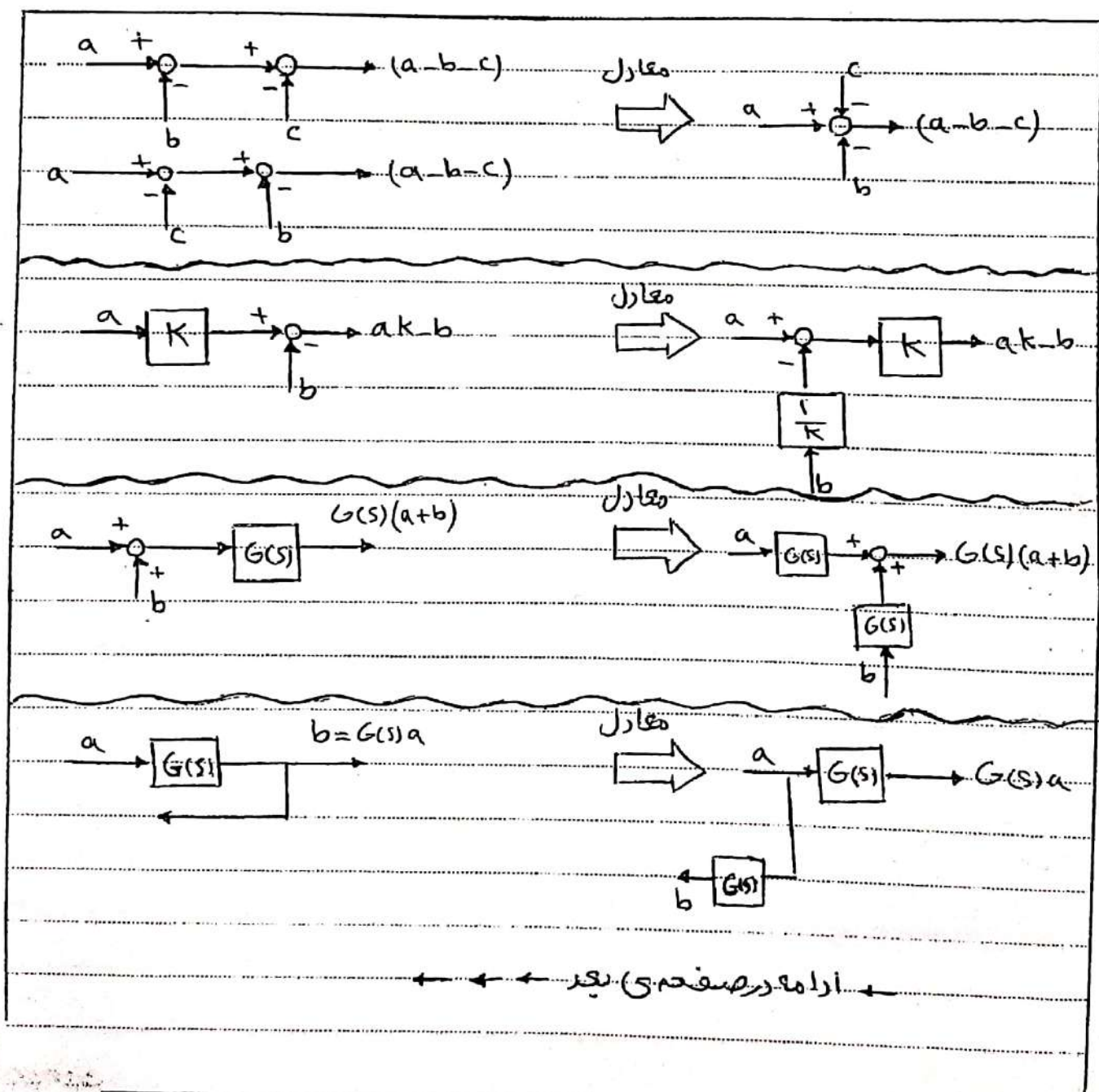
۲. هنگامی که از نمایش تریسیمی جعبه ای استفاده می کنیم حتماً باید ترتیب قرار گرفتن جعبه ها درست باشد زیرا همیشه سیستم تنها یک ورودی و یک خروجی ندارند و A, B, ... ما تریسیمی هستند.

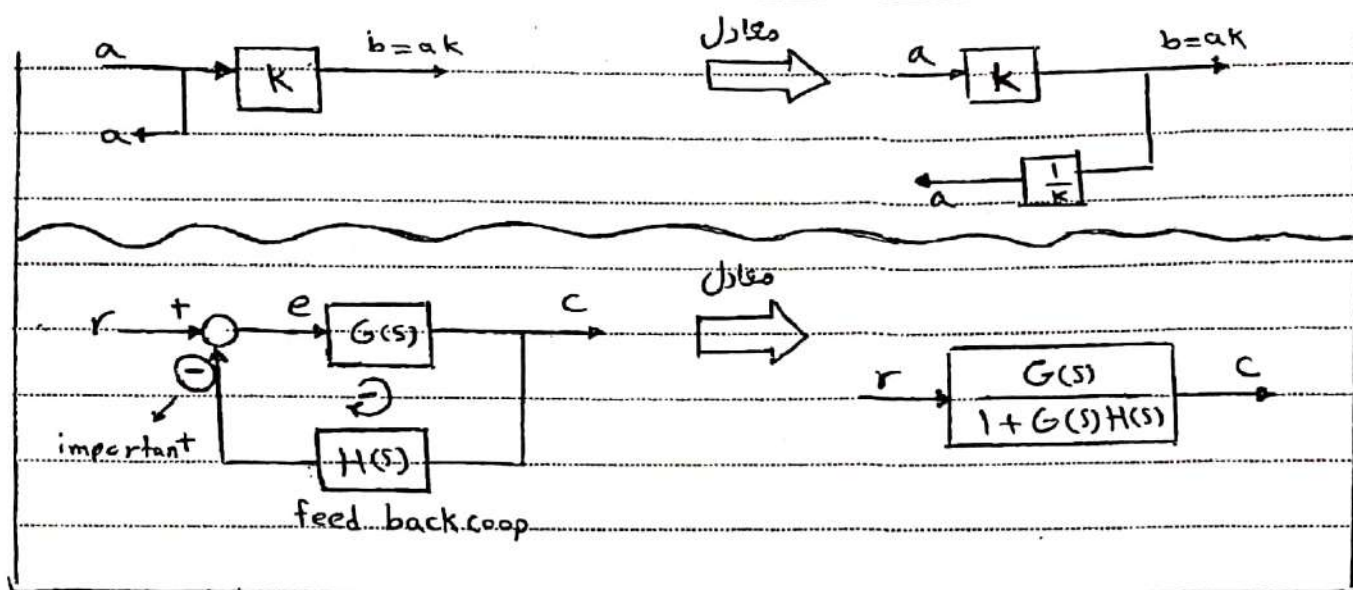
$$u(s) \rightarrow \boxed{B} \rightarrow B u(s) \quad \text{But} \quad u(s) \cdot B \cdot \dot{x} \quad \text{غلط}$$

$$u(s) \rightarrow \boxed{B} \rightarrow \boxed{A} \rightarrow A B u(s) \quad \text{But} \quad B A u(s) \neq \dot{x} \quad \& \quad u(s) A B \cdot \dot{x}$$

ساده کردن نمایش ترسیمی

چند نمونه کلی از ریاضیات گرام های جمعیه ای و معادل آنها به صورت زیر است





نمایش ترسیمی آخر در جدول فوق که اساس کار سیستم های feed back است و یکی از اهداف کنترل نیز این است که خروجی های سیستم را بازگرداند و به عنوان ورودی سیستم های دیگر استفاده کند به صورت زیر بدست می آید:

$$\begin{cases} c = G(s)e & \text{I} \\ e = r - H(s)c & \text{II} \end{cases}$$

با جای گذاری II در I داریم:

$$c = G(s)(r - H(s)c)$$

$$\rightarrow c(1 + G(s)H(s)) = G(s)r$$

در نتیجه رابطه ی بین خروجی و ورودی برابر است با:

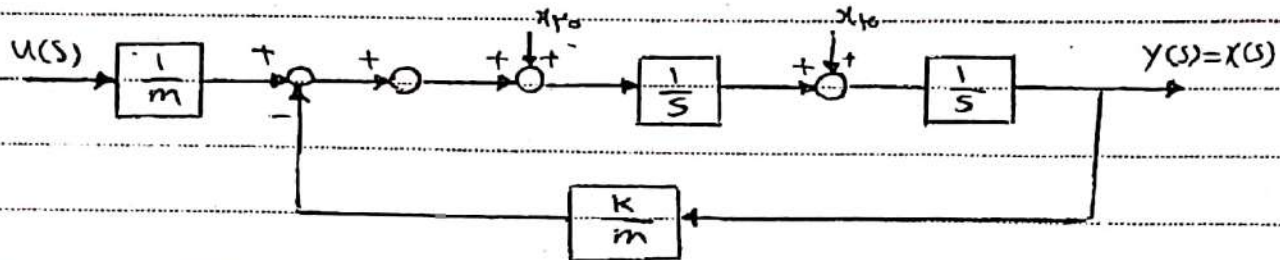
$$\frac{c}{r} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

این رابطه که قانون تانپسون هم از آن نتیجه می شود: تانپسون آنرا چنین بیان کرد که در هر سیستم فیدبک رابطه ی بین ورودی و خروجی به صورت زیر است:

$$\frac{\text{خروجی}}{\text{ورودی}} = \frac{\text{مسیر مستقیم بین ورودی و خروجی}}{\text{ضرب تمام ایلان های موجود در حلقه} + 1} = \text{تابع تبدیل در مدار فیدبک}$$

* اگر فیدبک مثبت باشد به جای علامت مثبت در مخرج از علامت منفی استفاده می کنیم

مثال) طبق فرمول تاملسون نمایش ترسیمی زیر را ساده کنید.



الف) رابطه $\frac{Y(s)}{U(s)}$ را بیابید.

ب) رابطه $\frac{Y(s)}{x_{20}}$ را بیابید.

ج) رابطه $\frac{Y(s)}{x_{10}}$ را بیابید.

توجه:

زمان محاسبه رابطه بین یک ورودی و یک خروجی در سیستمی که دارای چندین ورودی می باشد می باشد سایر ورودی ها مساوی صفر قرار بگیرند.

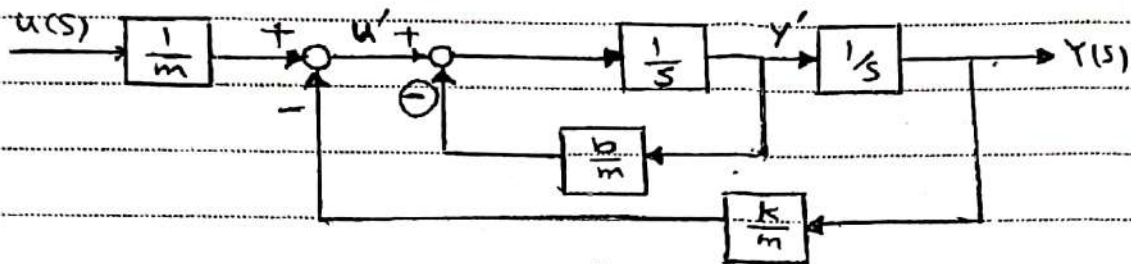
$$\text{الف)} \quad \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\frac{1}{m} \times \frac{1}{s} \times \frac{1}{s}}{1 + \frac{1}{s} \times \frac{1}{s} \times \frac{K}{m}} = \frac{1}{ms^2 + K}$$

$$\text{ب)} \quad \frac{Y(s)}{x_{20}} = \frac{\frac{1}{s} \times \frac{1}{s}}{1 + \frac{1}{s} \times \frac{1}{s} \times \frac{K}{m}} = \frac{m}{ms^2 + K}$$

$$\text{ج)} \quad \frac{Y(s)}{x_{10}} = \frac{\frac{1}{s}}{1 + \frac{1}{s} \times \frac{1}{s} \times \frac{K}{m}} = \frac{ms}{ms^2 + K}$$

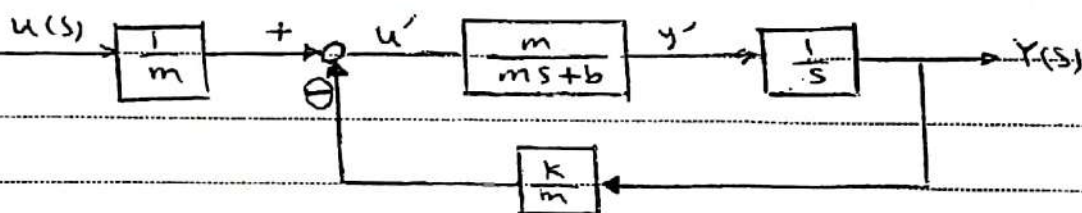
مخرج کسر که قطب های سیستم است همواره باید بدون تغییر باقی بماند و در تمامی حالات یکسان باشد زیرا قطب مربوط به دینامیک سیستم است و ربطی به ورودی ها ندارد بنابراین حتی اگر ورودی ها هم تغییر کنند نباید مخرج کسر یا قطب ها تغییر کند. مگر اینکه صورت کسر با مخرج آن کسر ساده شود و به عبارتی سیستم دارای مد پنهان باشد.

مثال) نمایش ترسیمی زیر را ساده کرده و تابع تبدیل آن را بیابید.



ابتدا باید حلقه داخلی را ساده کنیم به همین منظور از U' و Y' استفاده می کنیم.

$$\frac{Y'}{U'} = \frac{1/s}{1 \oplus 1/s \times \frac{b}{m}} = \frac{m}{ms+b}$$



$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\frac{1}{m} \cdot \frac{m}{ms+b} \cdot \frac{1}{s}}{1 \oplus \frac{m}{ms+b} \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{k}{m}} = \frac{1}{ms^2 + bs + k}$$

معادلات برداری حالت از تابع تبدیل:

می دانیم فرمول کلی یک تابع تبدیل به صورت زیر است:

$$G(s) = C(ST-A)^{-1}b + d$$

و به عبارتی

$$G(s) = \frac{s^m + b_m s^{m-1} + \dots + b_0}{s^n + a_n s^{n-1} + \dots + a_0} \quad n > m$$

$$\max(m) = n-1$$

* اگر در سیستمی به هر دلیلی رسته ای صورت و مخرج یکی شود باید در سیستم d داشته باشیم.

$$d = \text{مقدار دارد} \iff \text{If } m=n$$

یعنی اینکه:

$$G(s) = \frac{\text{چند جمله ای بر حسب } s \text{ با رسته } (n-1) \text{ حداکثر}}{\text{چند جمله ای بر حسب } s \text{ از رسته } (n)} \rightarrow d=0$$

$$G(s) = \frac{\text{چند جمله ای بر حسب } s \text{ از رسته } (n)}{\text{چند جمله ای بر حسب } s \text{ از رسته } (n)} \rightarrow d \neq 0$$

و به عبارتی:

$$G(s) = d + \frac{\text{چند جمله ای بر حسب } s \text{ با رسته } (n-1) \text{ حداکثر}}{\text{چند جمله ای بر حسب } s \text{ از رسته } (n)}$$

بنابراین اولین کار برای نوشتن معادلات حالت این است که d را استخراج نماییم.

مثال مقدار d را در تابع تبدیل زیر بیابید.

$$G(s) = \frac{3s+4}{s+1} \quad m=n=1 \rightarrow d \text{ داریم}$$

راه اول:

$$G(s) = \frac{3(s+1)+1}{s+1} = 3 + \frac{1}{s+1} \Rightarrow d=3$$

راه دوم: استفاده از فرمول $d = \lim_{s \rightarrow \infty} G(s)$ است.

$$d = \lim_{s \rightarrow \infty} G(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{3s+4}{s+1} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s(3+\frac{4}{s})}{s(1+\frac{1}{s})} = 3$$

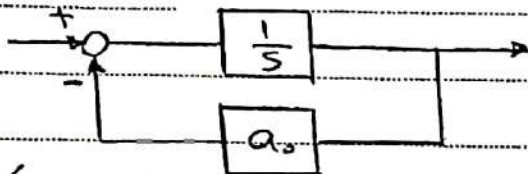
مثال معادله حالت سیستمی با تابع تبدیل زیر را بیابید.

$$G(s) = \frac{b_0}{s+a_0}$$

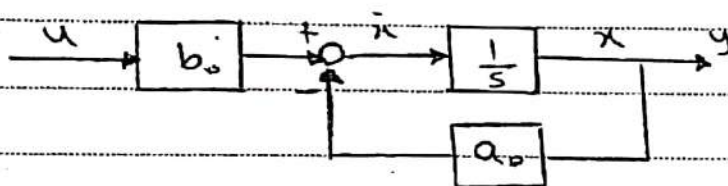
* ابتدا برای اینکه بتوان تابع تبدیل را به صورت رابطی نامپسون برآورد آن را بر s تقسیم می کنیم

$$G(s) = \frac{b_0/s}{1 + a_0/s} = \frac{\text{مسیر مستقیم}}{\text{حلقه}}$$

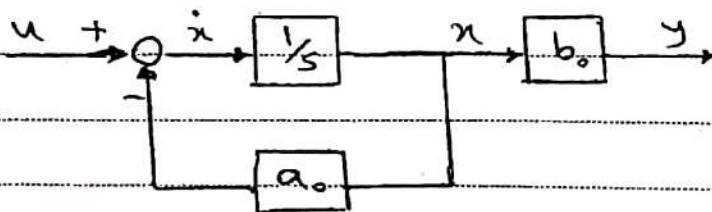
هم اکنون می توان نمایش ترسیمی زیر را از رابطی فوق استنتاج کرد:



تنها مشکل تبدیل سیستم از تابع تبدیل به معادلات حالت این است که این سیستم جواب یکتایی را بدست نمی دهد و (رأین مثال نیز با جای گذاری جعبه b_0 در قسمت راست یا چپ نمایش ترسیمی فوق معادله ای حالت متفاوتی بدست می آید



$$\textcircled{I} \begin{cases} \dot{x} = -a_0 x + b_0 u \\ y = x + 0u \end{cases}$$



$$\textcircled{II} \begin{cases} \dot{x} = -a_0 x + u \\ y = b_0 x + 0u \end{cases}$$

نکته: اگرچه سیستم پس از تبدیل شدن از تابع تبدیل به معادله ای حالت ممکن به جواب راشد ولی تمامی این حالات جواب اصلی مساله نخواهند بود به همین خاطر برای رفع این مشکل حالات خاصی را در نظر می گیرند و استنتاجاتی را لحاظ می کنند و سپس به پاسخ مساله ای یکتایی می رسند بنابراین در تابع تبدیل پس از اینکه d را به روش گفته شده حذف نمودند:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + \text{حذف شود}$$

و فرم کلی $G(s)$ به صورت زیر درآید:

$$G(s) = \frac{b_{n-1}s^{n-1} + b_{n-2}s^{n-2} + \dots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0}$$

و معادلات حالت نیز به صورت زیر باشند:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x = Ax + Bu \\ y = Cx + ou \end{cases}$$

آنگاه در انتخاب برای A, B, C وجود دارد:

انتخاب نوع اول:

$$A = \begin{bmatrix} -a_{n-1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ -a_2 & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_{n-1} \\ b_{n-2} \\ \vdots \\ b_1 \\ b_0 \end{bmatrix} \quad C = [1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0]$$

انتخاب نوع دوم:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = [b_0 \ b_1 \ \dots \ b_{n-1}]$$

* یک حالت خاص دیگر هم وجود دارد و آن این است که اگر تابع تبدیل دارای n ریشه حقیقی و مجزا باشد، آنگاه:

$$G(s) = \frac{b_n s^{n-1} + \dots}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots} = \frac{\text{چند جمله ای بر حسب دایره ای (n-1)}}{(s-p_1)(s-p_2) \dots (s-p_n)} = \frac{N(s)}{D(s)}$$

به طوری که:

$$p_1 \neq p_2 \neq \dots \neq p_n$$

و بتوانیم بنویسیم:

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{k_1}{s-p_1} + \frac{k_r}{s-p_r} + \dots + \frac{k_n}{s-p_n}$$

که در آن:

$$k_i = \lim_{s \rightarrow p_i} (s-p_i) G(s) = \lim_{s \rightarrow p_i} (s-p_i) \frac{N(s)}{D(s)}$$

می‌توانیم در معادلات حالت ماتریس‌های A, B, C را به صورت زیر نوشت:

$$A = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_r & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & p_n \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_r \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix}, \quad c = [1 \ 1 \ 1 \ \dots \ 1]$$

* با توجه به مطالب بیان شده نمایش $\textcircled{I}$ در مثال قبل فرم کلی معادله‌ی حالت سیستم مورد نظر است. اگر از انتخاب نوع اول استفاده کنیم و در صورتی که از انتخاب نوع دوم استفاده شود فرم کلی معادله‌ی حالت به صورت $\textcircled{II}$ خواهد بود.

« فصل چهارم »

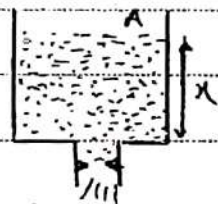
رفتار سیستم های خطی :

رفتار سیستم آزاد :

سیستمی که در آن ورودی مساوی صفر در نظر گرفته شود را « سیستم آزاد » و رفتار چنین سیستمی را « رفتار سیستم آزاد » گویند.

رفتار آزاد سیستم رسته ی یک :

برای مثال چنانچه یک سیستم سیالاتی رسته ی یک به صورت زیر داشته باشیم پاسخ چنین سیستمی برابر خواهد بود با :



$$\text{دبی جریان خروجی} - \text{دبی جریان ورودی} = \text{تغییرات حجم درون ظرف}$$

$$A \dot{x} = 0 - \frac{x}{R} \Rightarrow \dot{x} = -\frac{1}{RA} x \quad \& \quad x(0) = h$$

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{RA} x \Rightarrow \frac{dx}{x} = -\frac{1}{RA} dt$$

که با انتگرال گیری از طرفین رابطه ی فوق داریم :

$$t_f = 0 \rightarrow x_f = x_0 \quad t_f = t \rightarrow x_f = x$$

$$\Rightarrow \ln x - \ln x_0 = -\frac{1}{RA} t \Rightarrow x(t) = x_0 e^{-\frac{1}{RA} t} = x_0 e^{-at}$$

رفتار آزاد سیستم رسته ی n :

همان طوری که در فصل گذشته هم گفتیم هر سیستمی با هر رسته ای رای توان به صورت یک معادله ی دیفرانسیل برداری نوشت که برای یک سیستم مثلاً رابطه ای به صورت زیر رای توان در نظر گرفت :

$$\frac{d}{dt} x = Ax + Bu$$

این معادله یک معادله دیفرانسیل خطی است که دارای جواب خصوصی و جواب همگن است که جواب کلی معادله را تشکیل می دهد اما از آنجایی که در سیستم های آزاد ورودی صفر است و شرط اولیه $x(0) = x_0$ است معادله ی فوق فقط جواب همگن به صورت زیر دارد :

$$u = 0$$

$$x(0) = x_0$$

بای این دو را نمی توان عوضی کرد

$$\dot{x} = Ax \rightarrow x(t) = \phi(t) x_0$$

که به $\phi(t)$ ماتریس حل گویند و شامل یک ماتریس با ابعاد نامحدود به صورت زیر است :

$$\phi(t) = I + c_1 t + c_2 t^2 + \dots + c_k t^k + \dots$$

حال با جای گذاری این رابطه در $x(t)$ و سپس جای گذاری در $\dot{x} = Ax$ خواهیم داشت :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} (\phi(t) x_0) = A \cdot \phi(t) x_0$$

$$\Rightarrow c_1 + 2c_2 t + 3c_3 t^2 + \dots = A(I + c_1 t + c_2 t^2 + \dots)$$

و در نتیجه :

$$c_1 = AI = A = \frac{1}{1!} A$$

$$c_2 = \frac{1}{2} A c_1 = \frac{1}{2} A \cdot AI = \frac{1}{2} A^2 = \frac{1}{2!} A^2$$

$$c_3 = \frac{1}{3} A c_2 = \frac{1}{3} A^3 = \frac{1}{3!} A^3$$

$$c_4 = \frac{1}{4} A c_3 = \frac{1}{4} A^4 = \frac{1}{4!} A^4$$

⋮

$$c_n = \frac{1}{n!} A^n$$

با جای گذاری ثابت هارم معادلی ماتریس حل در نهایت $\phi(t)$ به صورت زیر در می آید:

$$\phi(t) = I + \frac{1}{1!} At + \frac{1}{2!} A^2 t^2 + \frac{1}{3!} A^3 t^3 + \dots = e^{At}$$

بنابراین حل این معادلی همگن همانند سیستم آزاد رسته ای یک است یعنی:

$$x(t) = \phi(t) x_0 = e^{At} x_0$$

توجه:

برای حل معادلی همگن باید e^{At} را بدست آوریم و باراشن A ، e^{At} بدست می آید ولی مساله این است که استفاده از بسط e^{At} جز در موارد خاصی امکان پذیر نیست زیرا مطابق این بسط ماتریس A را باید مرتباً به توان برسانیم و این عمل را بی نهایت بار تکرار کنیم تا e^{At} بدست بیاید.

یکی از این حالت های خاص این است که ماتریس A قطری باشد یعنی:

$$A = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & p_m \end{bmatrix}$$

در این صورت:

$$A^2 = \begin{bmatrix} p_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & p_m^2 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} p_1^3 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2^3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & p_m^3 \end{bmatrix}$$

$$A^k = \begin{bmatrix} p_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2^k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & p_m^k \end{bmatrix}$$

در نتیجه:

$$\phi(t) = e^{At} = \begin{bmatrix} e^{p_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{p_2 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & e^{p_m t} \end{bmatrix}$$

و باید توجه داشت که:

$$e^{pt} = 1 + pt + \frac{1}{2!} p^2 t^2 + \dots + \frac{1}{k!} p^k t^k + \dots$$

حالت خاص دیگر این است که ماتریس A دارای مقادیر ویژه تکراری باشد:

$$A = \begin{bmatrix} p & 1 \\ 0 & p \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} p^2 & 2p \\ 0 & p^2 \end{bmatrix}, \quad A^3 = \begin{bmatrix} p^3 & 3p^2 \\ 0 & p^3 \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad A^k = \begin{bmatrix} p^k & kp^{k-1} \\ 0 & p^k \end{bmatrix}$$

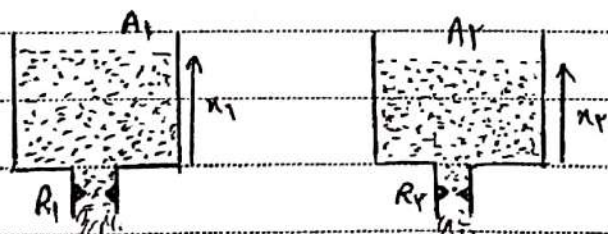
$$\Rightarrow e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} pt & t \\ 0 & pt \end{bmatrix} + \frac{1}{2!} \begin{bmatrix} p^2 t^2 & 2pt^2 \\ 0 & p^2 t^2 \end{bmatrix} + \dots + \frac{1}{k!} \begin{bmatrix} p^k t^k & kp^{k-1} t^k \\ 0 & p^k t^k \end{bmatrix} + \dots$$

$$\Rightarrow e^{At} = \begin{bmatrix} 1 + pt + \frac{1}{2!} p^2 t^2 + \dots & t(1 + pt + \frac{1}{2!} p^2 t^2 + \dots) \\ 0 & 1 + pt + \frac{1}{2!} p^2 t^2 + \dots \end{bmatrix}$$

و در نتیجه e^{At} به صورت زیر در می آید:

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{pt} & te^{pt} \\ 0 & e^{pt} \end{bmatrix}$$

مثال) سیستمی متشکل از دو مخزن به صورت زیر می باشد. رفتار سیستم را با فرض اینکه ارتفاع اولیه ظروف x_1 و x_2 است، بیابید.



$$\begin{cases} A_1 = A_2 = 1 \\ R_1 = R_2 = 1 \end{cases}$$

رفتار چنین سیستم هایی، رفتار $\Rightarrow$ سیستم های آزاد $\Rightarrow$ سیستم های بدون ورودی
سیستم آزاد است

در حالت کلی:

$$\begin{cases} \dot{x} = A'x = \frac{-1}{RA} x \\ x(0) = x_0 \end{cases} \Rightarrow x = e^{A't} x_0$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{-1}{R_1 A_1} (x_1 - 0) = \frac{-1}{1 \times 1} (x_1 - 0) = -x_1 \\ \dot{x}_2 = \frac{-1}{R_2 A_2} (x_2 - 0) = \frac{-1}{1 \times 1} (x_2 - 0) = -x_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \Rightarrow A' = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

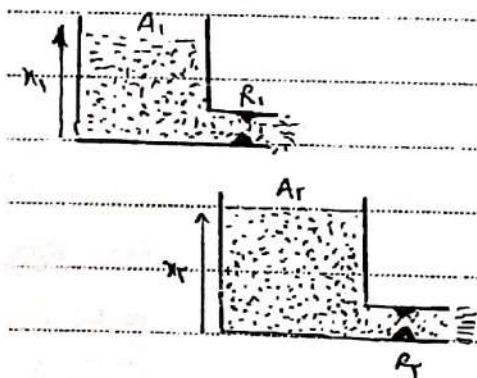
و این حالت خاصی است که صفی ۵۳ بدان اشاره شد.
چون A' قطری است بنابراین $e^{A't}$ برابر است با:

$$e^{A't} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}$$

و پاسخ سیستم برابر است با:

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1(t) = e^{-t} x_{10} \\ x_2(t) = e^{-t} x_{20} \end{cases}$$

مثال) رفتار سیستم زیر که از دو مخزن تشکیل شده و در آن $A_1 = A_2 = 1$ و ارتفاع اولیه مخزن ها x_{10} و x_{20} است، را بیابید.



$$\begin{cases} A_1 \dot{x}_1 = \frac{1}{R_1} (0 - x_1) \Rightarrow \dot{x}_1 = -x_1 \\ A_r \dot{x}_2 = \frac{x_1}{R_1} - \frac{x_2}{R_r} \Rightarrow \dot{x}_2 = x_1 - x_2 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

همان طوری که در مقدمه گفتیم حالت خاص A جوابی به صورت زیر دارد:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow e^{At} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ te^{-t} & e^{-t} \end{bmatrix}$$

در زیر روش بدست آمدن e^{At} را توضیح می دهیم:

$$e^{At} = \phi(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \frac{t}{1!} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \frac{t^2}{2!} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \frac{t^3}{3!} + \dots$$

$$+ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \frac{t^4}{4!} + \dots = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix}$$

$$\phi_{12} = 0$$

$$\phi_{11} = \phi_{22} = 1 - t + \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6} + \frac{t^4}{24} - \dots = e^{-t}$$

$$\phi_{21} = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} - \frac{t^4}{24} + \dots = t \left(1 - t + \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6} + \dots \right) = te^{-t}$$

$$\Rightarrow \phi(t) = e^{At} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ te^{-t} & e^{-t} \end{bmatrix}$$

$$x(t) = e^{At} x_0 \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ te^{-t} & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1(t) = x_{10} e^{-t} \\ x_2(t) = x_{10} t e^{-t} + x_{20} e^{-t} \end{cases}$$

نمود:

اگر تعداد المان ها زیاد شوند و سیستم ها پیچیده تر گردند دیگر نمی توان به سادگی جملات را بدست آورد و تشخیص داد که شکل کلی ϕ چگونه است به همین دلیل باید از برنامه های کامپیوتری استفاده نمود البته در زیر دوروش بیان

می‌گردد که حل مسائل و سیستم‌های پیچیده را ساده می‌کند.

① روش تبدیلات لاپلاس و معکوس

② روش قطری سازی

حل سیستم آزارنا استفاده از تبدیل معکوس لاپلاس:

$$L\left[\frac{d}{dt}x = Ax\right] \quad x(0) = x_0$$

$$sX(s) - x_0 = AX(s)$$

$$X(s)(sI - A) = x_0$$

$$X(s) = (sI - A)^{-1}x_0$$

$$x(t) = L^{-1}[(sI - A)^{-1}x_0] = L^{-1}[(sI - A)^{-1}]x_0$$

که با مشابه سازی با پاسخ که قبلاً دیدست آوریم؛ داریم:

$$e^{At} = L^{-1}[(sI - A)^{-1}]$$

مثال) برای سیستمی که ماتریس A آن به صورت زیر است e^{At} را بیابید.

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

از آنجایی که حل این مساله با روش‌هایی که قبلاً بیان شد بسیار مشکل است بهتر است از لاپلاس و معکوس استفاده نماییم.

$$(sI - A)^{-1} = \left(s \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \end{bmatrix}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} s + \frac{3}{4} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{1}{4} & s + \frac{3}{4} \end{bmatrix}^{-1}$$

$$(sI - A)^{-1} = \frac{\text{adj}(sI - A)}{\det(sI - A)} = \frac{1}{(s + \frac{3}{4})^2 - \frac{3}{4} \times \frac{1}{4}} \begin{bmatrix} s + \frac{3}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & s + \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{s^2 + \frac{3}{2}s + \frac{5}{16}} \begin{bmatrix} s + \frac{3}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & s + \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

Sina Sanedoust

$$e^{At} = L^{-1}[(sI - A)^{-1}]$$

$$\Rightarrow e^{At} = L^{-1} \begin{bmatrix} \frac{s + \frac{r}{r}}{(s+1)(s+r)} & \frac{\frac{r}{r}}{(s+1)(s+r)} \\ \frac{\frac{1}{r}}{(s+1)(s+r)} & \frac{s + \frac{r}{r}}{(s+1)(s+r)} \end{bmatrix}$$

$$L^{-1} \left[\frac{1}{s+1} \right] = e^{-t} \quad \& \quad L^{-1} \left[\frac{1}{s+r} \right] = e^{-rt}$$

$$\frac{s + \frac{r}{r}}{(s+1)(s+r)} = \frac{a}{s+1} + \frac{b}{s+r} = \frac{(a+b)s + ra + b}{(s+1)(s+r)}$$

برای محاسبه a و b می توان به دو روش عمل کرد:

روش دوم:

$$\begin{cases} a+b=1 \\ ra+b=\frac{r}{r} \end{cases}$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{r} \quad \& \quad b = \frac{1}{r}$$

روش اول:

$$a = \left. \frac{s + \frac{r}{r}}{s+r} \right|_{s=-1} = \frac{1}{r}$$

$$b = \left. \frac{s + \frac{r}{r}}{s+1} \right|_{s=-r} = \frac{1}{r}$$

$$\Rightarrow \phi_{11} = \phi_{rr} = \frac{1}{r} e^{-t} + \frac{1}{r} e^{-rt}$$

$$\frac{\frac{r}{r}}{(s+1)(s+r)} = \frac{a}{(s+1)} + \frac{b}{(s+r)}$$

$$a = \left. \frac{\frac{r}{r}}{s+r} \right|_{s=-1} = \frac{r}{r}$$

$$b = \left. \frac{\frac{r}{r}}{s+1} \right|_{s=-r} = \frac{r}{r}$$

$$\Rightarrow \phi_{11} = \frac{r}{r} e^{-t} + \frac{r}{r} e^{-rt}$$

$$\frac{1/4}{(s+1)(s+2)} = \frac{a}{s+1} + \frac{b}{s+2}$$

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{1/4}{s+2} \Big|_{s=-1} = \frac{1}{6} \\ b &= \frac{1/4}{s+1} \Big|_{s=-2} = -\frac{1}{6} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \phi_{r1} = \frac{1}{6} e^{-t} - \frac{1}{6} e^{-2t}$$

$$\Rightarrow e^{At} = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6}(e^{-t} + e^{-2t}) & \frac{1}{6}(e^{-t} - e^{-2t}) \\ \frac{1}{6}(e^{-t} - e^{-2t}) & \frac{1}{6}(e^{-t} + e^{-2t}) \end{bmatrix}$$

نکته:

مقادیر ویژه و ماتریس A ریشه‌های معادله مشخصه زیر هستند:

$$\det(sI - A) = 0$$

که:

۱. اگر معادله مشخصه سیستم دارای n ریشه حقیقی و مجزا باشد، به عبارتی اگر ماتریس $A_{n \times n}$ دارای n مقدار ویژه (حقیقی و غیر تکراری) باشد و آنها را با p_1 تا p_n بنامیم. توابع ضایع $e^{p_1 t}$ تا $e^{p_n t}$ که مودهای سیستم نام دارند در ماتریس حل e^{At} ظاهر می‌شوند.

۲. اگر معادله مشخصه دارای دو ریشه تکراری بوده و آنها را p بنامیم، مودهای سیستم عبارتند از e^{pt} و $t e^{pt}$ که در ماتریس حل e^{At} ظاهر می‌شوند و به طور کلی اگر معادله مشخصه دارای k ریشه تکراری p باشد (به عبارتی ماتریس A دارای k مقدار ویژه تکراری باشد) مودهای سیستم عبارتند از:

$$e^{pt}, t e^{pt}, \frac{1}{2!} t^2 e^{pt}, \dots, \frac{1}{(k-1)!} t^{k-1} e^{pt}$$

۳. اگر معادله مشخصه دارای ریشه‌های مختلط به صورت زیر باشند (حقیقی و ω حقیقی و غیر صفر)

$$p_1 = -\sigma + j\omega \quad p_2 = -\sigma - j\omega$$

در این صورت مورهای سیستم $e^{(-\sigma + j\omega)t}$ و $e^{(-\sigma - j\omega)t}$ خواهند بود

که این مورهای را می توان به صورت زیر بیان نمود:

$$e^{-\sigma t} \sin \omega t \quad e^{-\sigma t} \cos \omega t$$

مثال) چنانچه در یک سیستم دیرم و قدر ماتریس A به صورت زیر تعریف

شود: رفتار سیستم را تحت شرایط اولیه $x_1(0) = x_0$ و $x_2(0) = 0$ بیابید.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{bmatrix} \quad \omega^2 = \frac{k}{m} \text{ فرکانس طبیعی سیستم}$$

$$x(t) = e^{At} x_0 = L^{-1} [(sI - A)^{-1}] x_0$$

$$(sI - A)^{-1} = \left(\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ \omega^2 & 0 \end{bmatrix} \right)^{-1} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ \omega^2 & s \end{bmatrix}^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} s & 1 \\ -\omega^2 & s \end{bmatrix}}{s^2 + \omega^2}$$

$$e^{At} = L^{-1} \begin{bmatrix} \frac{s}{s^2 + \omega^2} & \frac{1}{s^2 + \omega^2} \\ \frac{-\omega^2}{s^2 + \omega^2} & \frac{s}{s^2 + \omega^2} \end{bmatrix} = L^{-1} \begin{bmatrix} \frac{s}{s^2 + \omega^2} & \frac{1}{\omega} \left(\frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \right) \\ -\omega \left(\frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \right) & \frac{s}{s^2 + \omega^2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \omega t & \frac{1}{\omega} \sin \omega t \\ -\omega \sin \omega t & \cos \omega t \end{bmatrix}$$

بنابراین رفتار سیستم برابر است با:

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \omega t & \frac{1}{\omega} \sin \omega t \\ -\omega \sin \omega t & \cos \omega t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x_1(t) = x_0 \cos \omega t \quad \& \quad x_2(t) = -x_0 \omega \sin \omega t$$

حل سیستم آزاد به روش قطری کردن:

در اینجا حل سیستم های آزاد به صورت زیر را به روش قطری سازی بدست می آوریم:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} x(t) = Ax(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

برای این منظور سیستم با متغیرهای حالت $x(t)$ فوق را به سیستم جدیدی با متغیرهای حالت $x^*(t)$ طوری تبدیل می کنیم که در سیستم جدید ماتریس مربوط قطری باشد و فرض می کنیم این کار توسط ماتریس مربع $T (n \times n)$ صورت پذیرد:

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} x^* = \overset{\text{قطری}}{\underset{\text{تبدیل}}{A}} x^*$$

$$\begin{cases} x(t) = T x^*(t) \\ \text{or} \\ x^*(t) = T^{-1} x(t) \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{شرایط اولیه} \\ \left\{ \begin{array}{l} x(0) = T x^*(0) \\ \text{or} \\ x^*(0) = T^{-1} x(0) \end{array} \right. \end{matrix}$$

$$\frac{d}{dt} [T x^*(t)] = A T x^*(t) \rightarrow T \frac{d}{dt} x^*(t) = A T x^*(t)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} x^*(t) = \underset{\Lambda}{T^{-1} A T} x^*(t)$$

که در رابطه فوق ماتریس مربع $T^{-1} A T$ را لامبدا می نامیم و فرض می کنیم که Λ ماتریس قطری است یعنی:

$$T^{-1} A T = \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

و پاسخ چنین سیستمی به صورت زیر است:

$$x^*(t) = e^{\Lambda t} x^*(0)$$

که همان طوری که قبلاً در صفحہ ۵۴ در مورد ماتریس قطری صحبت کردیم $e^{\Lambda t}$ در این رابطه برابر خواهد بود با:

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

و در نتیجه پاسخ $x(t)$ سیستم برابر است با:

$$x(t) = e^{At} x_0 = T x^*(t) = T [e^{At} x^*(0)] = T e^{At} (T^{-1} x(0))$$

$$\Rightarrow x(t) = e^{At} x_0 = T e^{At} T^{-1} x(0) \quad \& \quad e^{At} = T e^{At} T^{-1}$$

نکته:

ماتریس قطری Λ عبارت است از یک ماتریس مربع قطری که اجزای قطر آن همان مقادیر ویژه ماتریس A هستند و ماتریس مربع T نیز ماتریسی متشکل از n ستون است که هر ستون آن معرف یک بردار ویژه ماتریس A است که این موضوع در زیر نشان داده شده است.

$$x(t) = e^{At} x_0$$

$$\text{مقادیر ویژه} \rightarrow \det(SI - A) = 0$$

$$x^*(t) = e^{At} x_0$$

$$\text{مقادیر ویژه} \rightarrow \det(SI - \Lambda) = 0$$

بنابراین:

$$\det(SI - \Lambda) = \det(SI - T^{-1}AT) = 0$$

از طرفی می‌دانیم:

$$I = T^{-1}T \rightarrow SI = ST^{-1}T$$

و چون S یک مقدار است می‌توان نوشت:

$$SI = ST^{-1}T = T^{-1}ST$$

و در نتیجه:

$$\det(T^{-1}ST - T^{-1}AT) = 0$$

طبق قوانین دترمینان ماتریس‌های توان رابطه‌ی فوق را به صورت زیر نوشت:

$$\det(T^{-1}) \det(SI - A) \det(T) = 0$$

و چون $\det(T) \neq 0$ و $\det(T^{-1}) \neq 0$ است پس:

$$\det(SI - A) = 0$$

مقایسه‌ی مقادیر S جواب S

بنابراین λ_1 تا λ_n مقادیر ویژه‌ی ماتریس A هستند.

$$T^{-1} A T = \Lambda$$

با ضرب کردن طرفین رابطه (از یک سمت) در ماتریس T داریم:

$$A T = T \Lambda$$

$$T \Lambda = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & \dots & T_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{n1} & T_{n2} & \dots & T_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 T_{11} & \dots & \lambda_1 T_{1n} \\ \lambda_2 T_{21} & \dots & \lambda_2 T_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_n T_{n1} & \dots & \lambda_n T_{nn} \end{bmatrix}$$

برای سهولت، هر ستون T را با بردار ستونی v^i نشان می‌دهیم:

$$v^i = \begin{bmatrix} T_{1i} \\ \vdots \\ T_{ni} \end{bmatrix}$$

و در نتیجه:

$$T \Lambda = [\lambda_1 v^1 \quad \lambda_2 v^2 \quad \dots \quad \lambda_n v^n]$$

اگر از همین بردار ستونی v^i برای $A T$ استفاده کنیم، داریم:

$$A T = A \begin{bmatrix} T_{1i} \\ T_{2i} \\ \vdots \\ T_{ni} \end{bmatrix} = A v^i$$

و در نهایت می‌توان نوشت:

$$A v^i = \lambda_i v^i \quad i = 1, 2, \dots, n$$

یا به صورت زیر می‌نویسیم:

$\lambda_i v^i - A v^i = 0 \rightarrow (\lambda_i I - A) v^i = 0$
 که در این رابطه $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ مقادیر ویژه‌ی ماتریس A هستند
 و v^i نیز بردارهای ویژه‌ی ماتریس A هستند ($i=1, \dots, n$)

مراحل قطری سازی:

(۱) ابتدا مقادیر ویژه‌ی ماتریس A را بدست می‌آوریم:
 $\det(\lambda I - A) = 0 \rightarrow \lambda_i \checkmark$

(۲) بردارهای ویژه‌ی ماتریس A را بدست می‌آوریم:
 $(\lambda_i I - A) v^i = 0 \rightarrow v^i \checkmark$

(۳) ماتریس T (ماتریس مربع) را که ستون‌هایش v^1 تا v^n هستند را تشکیل
 می‌دهیم:

$$T = [v^1 \quad \dots \quad v^n] = [v^i]$$

(۴) ماتریس T^{-1} را بدست می‌آوریم:
 $T^{-1} = \frac{\text{adj } T}{\det T}$

(۵) با داشتن مقادیر ویژه‌ی λ_1 تا λ_n ماتریس مربع $e^{\lambda t}$ را تشکیل می‌دهیم

$$e^{\lambda t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

(۶) در نهایت پاسخ سیستم را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم
 $x(t) = T e^{\lambda t} T^{-1} x(0)$
 ↓
 شرایط اولیه

مثال) در سیستمی که معادله‌ی حالت آن به صورت $\frac{d}{dt}x = Ax$ و $x(0) = x_0$ است. رابطه‌ی قطری سازی بیابید به طوری که می‌دانیم:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

قدم اول: محاسبه‌ی مقادیر ویژه

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda + 3 & -1 & 0 \\ -2 & \lambda + 3 & -2 \\ 0 & -1 & \lambda + 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$(\lambda + 3)((\lambda + 3) \cdot 2 - 2) - (-1)(-2\lambda - 4 - 0) + 0(2 - 0) = 0$$

$$(\lambda + 3)(\lambda^2 + 4\lambda + 4) - 2(\lambda + 3) = 0$$

$$(\lambda + 3)(\lambda^2 + 4\lambda + 4 - 2) = 0$$

$$(\lambda + 3)(\lambda + 5)(\lambda + 1) = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} \lambda = -1 \\ \lambda = -3 \\ \lambda = -5 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

قدم دوم: محاسبه‌ی بردارهای ویژه

$$(\lambda_i I - A) v^i = 0$$

$$\begin{bmatrix} \lambda_i + 3 & -1 & 0 \\ -2 & \lambda_i + 3 & -2 \\ 0 & -1 & \lambda_i + 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

If $\lambda = -1$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} 2a - b = 0 \\ -2a + 2b - 2c = 0 \\ -b + 2c = 0 \end{cases}$$

اگر این مقادیر را با هم حل کنیم متوجه می شویم که برای a, b, c می توان
 بی نهایت جواب پیدا کرد به همین خاطر در اینجا به موقع کافی است یکی از
 مقادیر a یا b یا c را برابر ۱ قرار دهیم و مقادیر دیگر را از آن برداشت
 کنیم.

$$a = -1 \rightarrow b = 2 \text{ \& } c = 1 \Rightarrow v^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{If } \lambda = -3$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} -b = 0 \\ -2a - 2c = 0 \rightarrow a = c \\ -b = 0 \end{cases}$$

در این حالت نیز همانند آنچه در بالا گفته شد عمل می کنیم.

$$a = 1 \rightarrow c = 1 \text{ \& } b = 0 \Rightarrow v^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{If } \lambda = -5$$

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} -2a - b = 0 \\ -2a - 2b - 2c = 0 \\ -b - 2c = 0 \end{cases}$$

در این حالت نیز بی نهایت جواب داریم و این بار مقدار a که به آن نسبت می دهیم
 ۱ است در نتیجه

$$a = -1 \rightarrow b = 2 \rightarrow c = -1 \Rightarrow v^3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

قدم سوم: تشکیل ماتریس T

$$T = [v^1 \ v^2 \ v^3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

قدم چهارم: تشکیل مکتوس ماتریس T یعنی T^{-1} :

$$T^{-1} = \frac{\text{adj } T}{\det T}$$

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} = (-1)^2(0+2) & C_{12} = (-1)^2(-2-2) & C_{13} = (-1)^2(-2-0) \\ C_{21} = (-1)^2(-1-1) & C_{22} = (-1)^2(-1+1) & C_{23} = (-1)^2(-1-1) \\ C_{31} = (-1)^2(2-0) & C_{32} = (-1)^2(2+2) & C_{33} = (-1)^2(0-2) \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} = 2 & C_{12} = 4 & C_{13} = -2 \\ C_{21} = 2 & C_{22} = 0 & C_{23} = 2 \\ C_{31} = 2 & C_{32} = -4 & C_{33} = -2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow C^T = \text{adj } T = \begin{bmatrix} C_{11} = 2 & C_{21} = 2 & C_{31} = 2 \\ C_{12} = 4 & C_{22} = 0 & C_{32} = -4 \\ C_{13} = -2 & C_{23} = 2 & C_{33} = -2 \end{bmatrix}$$

قرینه می شود

$$\det T = 1(0+2) - 1(-2-2) - 1(-2-0) = 8$$

$$\Rightarrow T^{-1} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & -4 \\ -2 & 2 & -2 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

قدم پنجم: تشکیل ماتریس e^{At} و عبارت e^{At} :

$$e^{At} = T e^{\Lambda t} T^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-5t} \end{bmatrix}}_{e^{\Lambda t}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow e^{At} = \begin{bmatrix} e^{-t} + re^{-rt} + e^{-at} & e^{-t} - e^{-at} & e^{-t} - re^{-rt} + e^{-at} \\ re^{-t} - re^{-at} & re^{-t} + re^{-at} & re^{-t} - re^{-at} \\ e^{-t} - re^{-rt} + e^{-at} & e^{-t} - e^{-at} & e^{-t} + re^{-rt} + e^{-at} \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{r}$$

توجه:

بنابراین یکی از مقادیر ویژه ی سیستمی تکراری باشد برای حل مساله باید از بسط جردن استفاده نمود. روش حل این مقادیر و محاسبه ی بردار ویژه ی آنها در پیوست کتاب دکترا غفاری نوشته شده است.

$$(\lambda_i I - A) \cdot v_i = 0 \Rightarrow (\lambda_i E - A) \cdot v_r = v_l \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

جردن

مثالی) معادله ی حالت سیستمی به صورت $\frac{d}{dt}x = Ax$ و $x(0) = x_0$ داده شده است که در آن ماتریس ها به صورت زیر می باشند؛ ابتدا e^{At} را به روش قطری کردن بدست آوریم و سپس رفتار سیستم را بدست آورده و آن را ترسیم کنیم.

$$A = \begin{bmatrix} -\sigma & w \\ -w & -\sigma \end{bmatrix} \quad , \quad x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(در ماتریس A ، σ ، w اعداد حقیقی مثبت هستند)

قدم اول: محاسبه ی مقادیر ویژه

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda + \sigma & -w \\ w & \lambda + \sigma \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (\lambda + \sigma)^2 + w^2 = 0$$

$$(\lambda + \sigma)^2 = -w^2 \Rightarrow \lambda + \sigma = \pm wj$$

$$\lambda = -\sigma - wj$$

$$\lambda = -\sigma + wj$$

قدم دوم: محاسبه بردارهای ویژه:

$$(\lambda_i I - A) v^i = 0$$

$$\begin{bmatrix} \lambda_i + \sigma & -\omega \\ \omega & \lambda_i + \sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{If } \lambda = -\sigma + j\omega$$

$$\begin{bmatrix} j\omega & -\omega \\ \omega & j\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} j\omega a - \omega b = 0 \\ \omega a + j\omega b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \text{هر دو یکی} \\ \text{می شوند} \end{matrix}$$

در اینجا خودمان به a مقدار 1 را می دهیم و b را محاسبه می کنیم:

$$a = 1 \rightarrow b = j \rightarrow v^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ j \end{bmatrix}$$

$$\text{If } \lambda = -\sigma - j\omega$$

$$\begin{bmatrix} -j\omega & -\omega \\ \omega & -j\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} -j\omega a - \omega b = 0 \\ \omega a - j\omega b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \text{هر دو یکی} \\ \text{می شوند} \end{matrix}$$

و دوباره داریم:

$$a = 1 \rightarrow b = -j \rightarrow v^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -j \end{bmatrix}$$

قدم سوم و چهارم: تشکیل ماتریس مربعی T, T^{-1} :

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ j & -j \end{bmatrix} \Rightarrow T^{-1} = \frac{1}{-j-j} \begin{bmatrix} -j & -1 \\ -j & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{-2j} \begin{bmatrix} j & 1 \\ j & -1 \end{bmatrix}$$

قدم پنجم: تشکیل ماتریس e^{At} و $e^{A^T t}$:

$$e^{At} = T e^{\Lambda t} T^{-1} = \frac{1}{-2j} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ j & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{(-\sigma+j\omega)t} & 0 \\ 0 & e^{(-\sigma-j\omega)t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j & 1 \\ j & -1 \end{bmatrix}$$

$$= e^{-\sigma t} \begin{bmatrix} e^{j\omega t} & 0 \\ 0 & e^{-j\omega t} \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = \frac{e^{-\sigma t}}{r_j} \begin{bmatrix} e^{j\omega t} & e^{-j\omega t} \\ je^{j\omega t} & -je^{-j\omega t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j & 1 \\ j & -1 \end{bmatrix} = e^{-\sigma t} \begin{bmatrix} \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{r_j} & \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{r_j} \\ -\frac{(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t})}{r_j} & \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{r_j} \end{bmatrix}$$

$$\sin \omega t = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} \quad \& \quad \cos \omega t = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}$$

(رنتیج)

$$e^{At} = e^{-\sigma t} \begin{bmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\sin \omega t & \cos \omega t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-\sigma t} \cos \omega t & e^{-\sigma t} \sin \omega t \\ -e^{-\sigma t} \sin \omega t & e^{-\sigma t} \cos \omega t \end{bmatrix}$$

قدم ششم: محاسبه $x(t)$

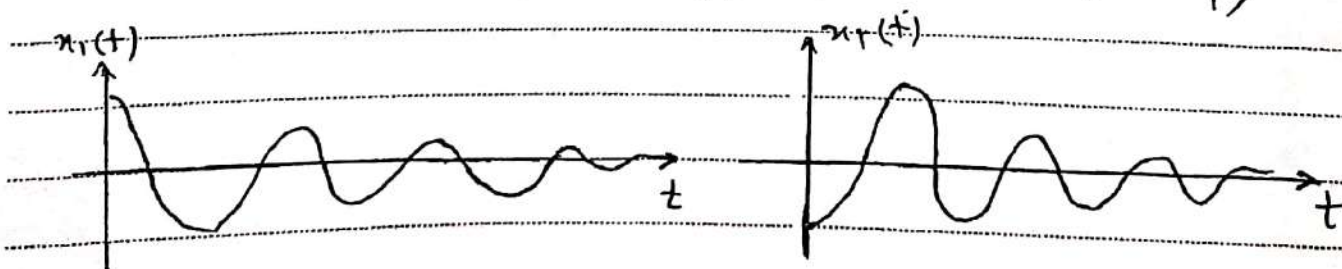
$$x(t) = e^{At} x_0 = \begin{bmatrix} e^{-\sigma t} \cos \omega t & e^{-\sigma t} \sin \omega t \\ -e^{-\sigma t} \sin \omega t & e^{-\sigma t} \cos \omega t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1(t) = e^{-\sigma t} (\sin \omega t + \cos \omega t) \\ x_2(t) = e^{-\sigma t} (\cos \omega t - \sin \omega t) \end{cases}$$

می توانیم روابط فوق را به صورت زیر هم بنویسیم:

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1(t) = \sqrt{r} e^{-\sigma t} \left(\sin \omega t \cos \frac{\pi}{4} + \cos \omega t \sin \frac{\pi}{4} \right) \\ x_2(t) = -\sqrt{r} e^{-\sigma t} \left(\sin \omega t \cos \frac{\pi}{4} - \cos \omega t \sin \frac{\pi}{4} \right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1(t) = \sqrt{r} e^{-\sigma t} \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{r} e^{-\sigma t} \sin \left(\sqrt{r} \omega t + \frac{\pi}{4} \right) \\ x_2(t) = -\sqrt{r} e^{-\sigma t} \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{4} \right) = -\sqrt{r} e^{-\sigma t} \sin \left(\sqrt{r} \omega t - \frac{\pi}{4} \right) \end{cases}$$



رفتار سیستم ها تحت اثر ورودی :

چنانچه یک سیستم رسته ای n با یک ورودی و یک خروجی را در نظر بگیریم:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} x = Ax + Bu \\ y = cx + du \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

شرط اولیه

برای بدست آوردن پاسخ این سیستم با $x(t)$ می توان آن را به صورت مجموع حل همگن و خصوصی نوشت:

$$x(t) = x_g + x_p$$

بخش هارمونیک $x_g = e^{At} x_0$: پاسخ عمومی

بخش ثابت $x_p = \phi(t) p(t) = e^{At} p(t)$: پاسخ خصوصی

* که پاسخ کلی که از حاصل بخش هارمونیک و ثابت بدست می آید رفتار هارمونیک را دارد.

حال بیا توجه به پاسخ خصوصی و جای گذاری آن در معادله ای داریم:

$$\frac{d}{dt} x_p = Ax_p + Bu$$

$$A e^{At} p(t) + e^{At} \frac{d}{dt} p(t) = A e^{At} p(t) + Bu(t)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} p(t) = e^{-At} B u(t)$$

چنانچه از رابطه ای فوق از $t=0$ تا t انتگرال بگیریم داریم:

$$p(t) = \int_0^t e^{-A\tau} B u(\tau) d\tau$$

$$\Rightarrow x_p = e^{At} \int_0^t e^{-A\tau} B u(\tau) d\tau = \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau$$

که به انتگرال بدست آمده در رابطه ی اخیر انتگرال کانولوشن گویند.

$$x(t) = e^{At} x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau$$

و در نهایت خواهیم داشت:

$$y(t) = C e^{At} x_0 + C \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau + d u(t)$$

رفتار سیستم با ورودی صفر

Zero input res.

رفتار سیستم با شرایط اولیه ی صفر

Zero state res.

حل معادلات سیستم از طریق تبدیل مگنوس لاپلاس:

همان طور که سیستم زیر را در صفحه ی قبل بررسی کردیم در اینجا آن را به روش تبدیل مگنوس لاپلاس می یابیم:

$$L \left[\frac{d}{dt} x = Ax + Bu \right]$$

$$y = cx + du$$

$$\Rightarrow sX(s) - x(0) = AX(s) + BU(s)$$

$$(sI - A)X(s) = x_0 + BU(s)$$

$$X(s) = \underbrace{L^{-1}[(sI - A)^{-1} x_0]}_{\text{جواب عمومی یا همگن}} + \underbrace{L^{-1}[(sI - A)^{-1} B U(s)]}_{\text{جواب خصوصی سیستم}}$$

جواب عمومی یا همگن

جواب خصوصی سیستم

از طرفی از ریاضیات می دانیم که حاصل ضرب دو تابع زمانی توان به صورت زیر نوشت:

$$F_1(s) \cdot F_2(s) = \int_0^t f_1(\tau) \cdot f_2(\tau - t) d\tau$$

قبل تر نشان دادیم که جواب عمومی این سیستم به صورت زیر است:

$$x_0 = L^{-1}[(sI - A)^{-1} x_0] = e^{At} x_0$$

حال طبق نکته ی گفته شده جواب خصوصی سیستم برابر است با:

$$x_p = \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau$$

و در نهایت داریم:

$$x(t) = e^{At} x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau$$

خروجی $Y(s)$ در میدان لاپلاس این سیستم نیز برابر است با:

$$Y(s) = C X(s) + d u(s)$$

$$= C \left((sI - A)^{-1} x_0 + (sI - A)^{-1} B u(s) \right) + d u(s)$$

$$Y(s) = \underbrace{C (sI - A)^{-1} x_0}_{\text{مقدار سیستم با ورودی صفر}} + \underbrace{C (sI - A)^{-1} B u(s)}_{\text{مقدار سیستم با شرایط اولیه صفر}} + d u(s)$$

تابع تبدیل چنتا سیستمی زمانی که شرایط اولیه صفر است ($x_0 = 0$) برابر خواهد بود با:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{u(s)} = C (sI - A)^{-1} B + d$$

قضیه ی مقدار نهایی:

هرگاه توابع $f(t)$ و مشتق آن $f'(t)$ دارای تبدیل لاپلاس باشند و $F(s)$ لاپلاس تابع $f(t)$ باشد چنانچه حد $f(t)$ وقتی $t \rightarrow \infty$ میل می کند موجود باشد آنگاه:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s F(s) = y_{ss}$$

steady state

توجه:

هر زمان که صحبت از حالت ماندگار - حالت پایدار - مقدار نهایی و ... شد باید از قضیه ی فوق استفاده نمود.

اثبات قضیه:

می رانیم که طبق تعریف لاپلاس:

$$L[f'(t)] = \int_0^{\infty} f'(t) e^{-st} dt \quad (1)$$

$$L[f'(t)] = SF(s) - f(0) \quad (2)$$

زمانی که $s=0$ باشد $e^{-st} = 1$ خواهد بود بنابراین با توجه به (1) و (2) و در صورتی که $s=0$ است داریم:

$$\int_0^{\infty} f'(t) dt = \lim_{s \rightarrow 0} SF(s) - f(0)$$

$$f(t)|_0^{\infty} = \lim_{s \rightarrow 0} SF(s) - f(0)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) - f(0) = \lim_{s \rightarrow 0} SF(s) - f(0) \Rightarrow \text{قضیه اثبات می شود}$$

نکته:

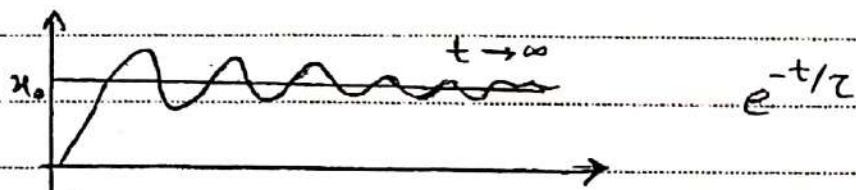
این قضیه مبین آن است که رفتار $f(t)$ در حدود $t = \infty$ برابر رفتار $SF(s)$ در تریکی های $s=0$ است.

اگر $SF(s)$ دارای قطب هایی در روی محور موهومی (به جز $s=0$) و یا در سمت راست محور موهومی باشد در این صورت $f(t)$ دارای مقدار نهایی نخواهد بود و نمی توان از قضیه فوق استفاده نمود. همچنین اگر $f(t)$ تابع سینوسی باشد قضیه غیر قابل قبول است.

چنانچه $SF(s)$ در $s=0$ دارای قطب باشد مطابق قضیه مقدار نهایی $f(\infty)$ می شود که به طور دقیق نحوه رفتار چینه سیستمی را به ازای t نشان می دهد.

علت این از قضیه مقدار نهایی استفاده می شود این است که زمانی که سیستم

تحت اثر ورودی قرار بگیرد. در صورتی که ثابت زمانی سیستم را با τ (عکس مقدار و تیره‌ی زمانی) نشان دهیم باید حدود τ برابر عکس مقدار و تیره‌ی زمانی را بی نهایت فرض نمود و مقدار پاسخ سیستم را در آنجا محاسبه کرد زیرا این محل را می توان جایی فرض کرد که سیستم ایستاده و به همین خاطر این زمان برای ما حائز اهمیت است.



$$y(t) = ?$$

$$t \rightarrow \infty$$

قضیه مقدار اولیه:

هرگاه $f(t)$, $f'(t)$ را برای تبدیل لاپلاس باشند و $F(s)$ تبدیل لاپلاس $f(t)$ بوده و در $SF(s)$ نیز وقتی $S \rightarrow \infty$ وجود داشته باشد. آنگاه داریم:

$$\lim_{S \rightarrow \infty} SF(s) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = f(0^+)$$

اثبات قضیه:

$$L[f'(t)] = \int_0^{\infty} f'(t) e^{-st} dt = SF(s) - f(0)$$

از آنجا که در فاصله کوتاه $t=0$ تا $t=0^+$ یعنی زمان بسیار کوتاهی پس $t=0$ مقدار e^{-st} مساوی واحد است. لذا:

$$\int_0^{0^+} f'(t) dt + \int_0^{\infty} f'(t) e^{-st} dt = SF(s) - f(0)$$

زمانی که $S \rightarrow \infty$ میل کند. دوم سمت چپ را بی نهایت فرض شود:

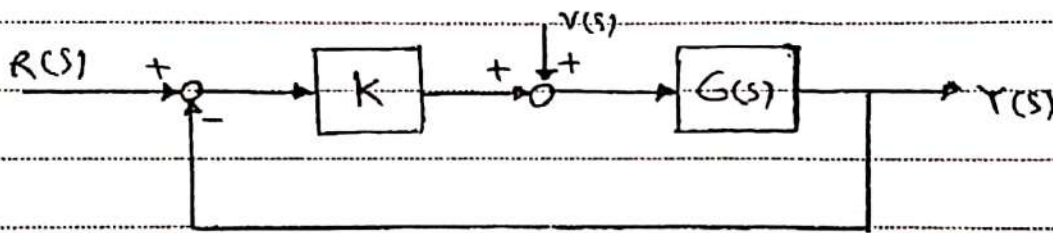
$$S \rightarrow \infty \Rightarrow e^{-st} = e^{-\infty} = 0$$

$$\Rightarrow \int_0^{0^+} f'(t) dt = \lim_{S \rightarrow \infty} SF(s) - f(0)$$

$$f(t)|_0^{0+} = f(0+) - f(0-) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) - f(0-) \Rightarrow \text{قضیه اثبات گردید}$$

مثال) در سیستم شکل زیر تابع تبدیل سیستم عبارت است از $G(s) = \frac{1}{(s+2)(s+3)}$ و $R(s)$ معرف ورودی مبنا و $V(s)$ نیز ورودی متراحم است.
الف) با ساده کردن دیاگرام جعبه‌ای عکس العمل $Y(s)$ را نسبت به ورودی‌های $R(s)$ و $V(s)$ بدست آورید.

ب) به ازای چه مقدار K عکس العمل سیستم برابر ورودی مبنا خواهد بود.
ج) اگر $V(s) = 0$ و ورودی مبنا نیز تابع پله واحد باشد عکس العمل سیستم را به ازای $K = 0.25$ بدست آورده و مقدار نهایی آن را تعیین نمایید.



$$\text{الف) } \frac{Y}{R}, \frac{Y}{V}$$

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s) \cdot K}{1 + G(s) \cdot K}$$

$$\frac{Y(s)}{V(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s) \cdot K}$$

ب) زمانی $Y \approx R$ خواهد شد که $K \rightarrow \infty$ میل کند.

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s) \cdot K}{G(s) \cdot K \left(\frac{1}{G(s) \cdot K} + 1 \right)}$$

(K خیلی خیلی بزرگ شود) $K \rightarrow \infty$

$$\Rightarrow Y(s) = G_1 R + G_2 U$$

(ج) محاسبی و زمانی که سیستم به حالت ماندگار می رسد

$$y_{ss} = y_{\text{steady state}} = ?$$

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s) \cdot K}{G(s) \left(\frac{1}{G(s)} + K \right)} = \frac{0,2a}{(s+2)(s+3)+0,2a} = \frac{0,2a}{s^2+2s+4+0,2a}$$

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{0,2a}{(s+2,5)^2}$$

از آنجایی که ورودی تابع پله ای واحد است داریم:

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \Rightarrow R(s) = L[u(t)] = \frac{1}{s}$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{0,2a}{(s+2,5)^2}$$

$$\Rightarrow y(t) = L^{-1} \left[\frac{1}{s} \cdot \frac{0,2a}{(s+2,5)^2} \right] = L^{-1} \left[\frac{a}{s} + \frac{b}{s+2,5} + \frac{c}{(s+2,5)^2} \right]$$

$$a(s+2,5)^2 + b(s)(s+2,5) + c(s) = 0,2a$$

$$a(s^2+2s+4,25) + b(s^2+2,5s) + c(s) = 0,2a$$

$$(a+b)s^2 + (2a+2,5b+c)s + (4,25a) = 0,2a$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4,25a = 0,2a & \textcircled{1} \rightarrow a = 0,04 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a+2,5b+c = 0 & \textcircled{2} \rightarrow c = -2(0,04) - 2,5(-0,04) = -0,1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b = 0 & \textcircled{3} \rightarrow b = -a = -0,04 \end{cases}$$

$$y(t) = L^{-1} \left[\frac{0,04}{s} \right] + L^{-1} \left[\frac{-0,04}{s+2,5} \right] + L^{-1} \left[\frac{-0,1}{(s+2,5)^2} \right]$$

$$y(t) = 0,04 - 0,04e^{-2,5t} - 0,1te^{-2,5t}$$

بنابراین پاسخ حالت ماندگار سیستم برابر است با:

$$y_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0,04$$

که این پاسخ را از طریق قضیه مقدارهای نیر می توان بدست آورد.

$$y_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s y(s)$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{0,25}{(s+2,5)^2} \cdot \frac{1}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{0,25}{(s+2,5)^2} = \frac{0,25}{(2,5)^2} = 0,04$$

« فصل پنجم »

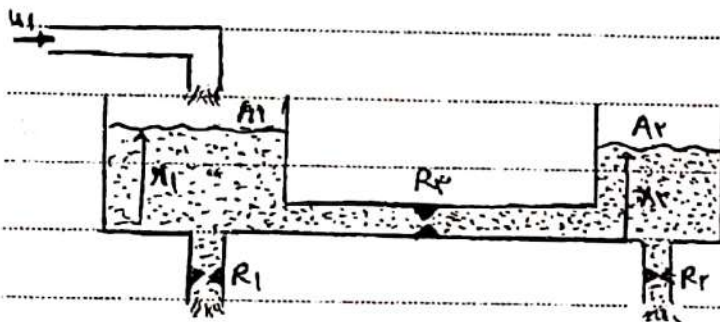
پایداری سیستم های خطی:

کنترل پذیری و مشاهدپذیری:

سیستمی را کنترل پذیر گویند که ورودی آن مستقیماً بر تمامی متغیرهای حالت سیستم تأثیر بگذارد.

سیستمی را مشاهده پذیر گویند که خروجی آن از تمامی متغیرهای حالت سیستم تأثیر بپذیرد. به عبارتی اگر در سیستمی خروجی داشته باشیم این خروجی تمامی متغیرهای حالت را در بر گیرد.

مثال) آیا سیستم شکل زیر مشاهده پذیر و کنترل پذیر است یا خیر؟



$$R_1 = R_2 = R_3 = 1$$

$$A_1 = A_2 = 1$$

توجه:

طبق تعریف کنترل پذیری و مشاهده پذیری اگر در سیستم شکل فوق u (ورودی) مستقیماً بر روی x_1 و x_2 تأثیر بگذارد این سیستم کنترل پذیر است و اگر لا (خروجی سیستم) نیز x_1 و x_2 را در بر گیرد این سیستم مشاهده پذیر است البته باید توجه داشت که تنها از روی شکل ظاهری نمی توان به کنترل پذیری و مشاهده پذیری سیستم پی برد بلکه برای تشخیص درست ابتدا باید سیستم را قطری کرد و سپس در مورد کنترل پذیری و مشاهده پذیری آن سخن گفت.

دبی جریان خروجی - دبی جریان ورودی = تغییرات حجم سیستم

$$A_1 \frac{dx_1}{dt} = u - \frac{x_1 - x_2}{R_2} - \frac{x_1}{R_1} \rightarrow \frac{dx_1}{dt} = u - 2x_1 + x_2$$

$$A_r \frac{dx_r}{dt} = \frac{x_1 - x_r}{R_r} - \frac{x_r}{R_r} \rightarrow \frac{dx_r}{dt} = x_1 - 2x_r$$

و خروجی این سیستم برابر است با:

$$y = x_1 - x_r$$

حال در میزبان لاپلاس (با شرط ورودی صفر $x_0 = 0$) داریم:

$$sX_1(s) - 0 = -2X_1(s) + X_2(s) + u(s)$$

$$\Rightarrow X_1(s) = \frac{1}{s} [-2X_1(s) + X_2(s) + u(s)]$$

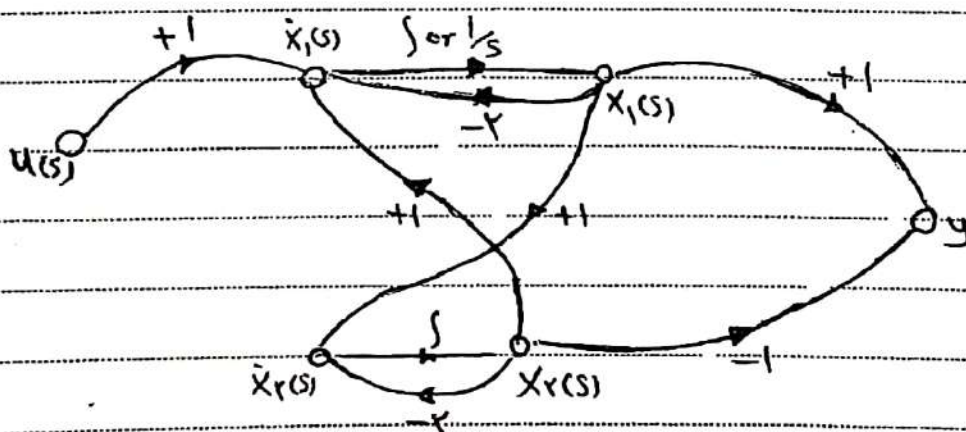
$$sX_2(s) - 0 = X_1(s) - 2X_2(s)$$

$$\Rightarrow X_2(s) = \frac{1}{s} [X_1(s) - 2X_2(s)]$$

$$Y(s) = X_1(s) - X_2(s)$$

با رسم نمایش جریان سیستم فوق در میزبان لاپلاس داریم:

$$\frac{1}{s} \rightarrow \int$$



آنچه که از نمایش ترسیمی فوق بر می آید این است که این سیستم کنترل پذیر نیست ولی مشاهده پذیر است اما همانطور که گفته شد برای تشخیص کنترل پذیری و مشاهده پذیری، باید سیستم را قطری نمود.

همان طوری که قبلاً آموختیم برای قطری سازی باید ماتریس T را برگزینیم
آزاد

$$x(t) = T x^*(t) \quad \left. \begin{array}{l} x^*(t) \text{ ماتریس قطری} \\ T \text{ ماتریس تبدیل} \end{array} \right\}$$

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}(Tx^*(t)) = ATx^*(t) + Bu \rightarrow \frac{dx^*(t)}{dt} = \underbrace{T^{-1}AT}_{A^*}x^*(t) + \underbrace{T^{-1}B}_{B^*}u$$

$$y = Cx + Du$$

$$y = \underbrace{(CT)^{-1}}_{C^*}x^*(t)$$

از طرفی در این سیستم می دانیم که

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad \& \quad y = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \quad \& \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \& \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda + 2 & -1 \\ -1 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = (\lambda + 2)^2 - 1 = \lambda^2 + 4\lambda + 4 - 1 = (\lambda + 3)(\lambda + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = -1, -3 \quad \text{مقادیر ویژه}$$

$$(\lambda I - A)v^i = 0$$

$$\text{If } \lambda = -1 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow v^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Sina Sanedoust

$$\text{If } \lambda = -2 \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \end{cases} \Rightarrow v^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$T = [v^1 \ v^2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow T^{-1} = \frac{1}{-1-1} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A = T^{-1} A T = \text{ماتریس قطری مقادیر ویژه} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$B^* = T^{-1} B = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$C^* = C T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix}$$

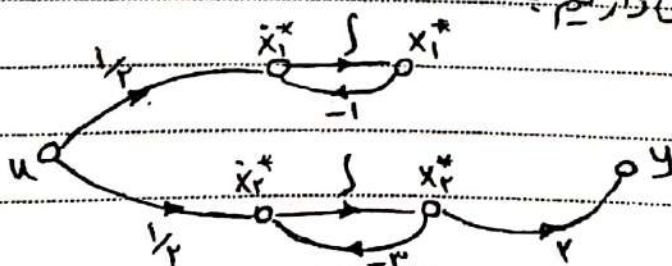
در نتیجه خواصم را شد:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} u \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1^* = -x_1^* + \frac{1}{2} u \\ \dot{x}_2^* = -2x_2^* + \frac{1}{2} u \end{cases}$$

$$\text{میان لا پلاس} \Rightarrow \begin{cases} X_1^*(s) = \frac{1}{s} \left[-X_1^*(s) + \frac{1}{2} u(s) \right] \\ X_2^*(s) = \frac{1}{s} \left[-2X_2^*(s) + \frac{1}{2} u(s) \right] \end{cases}$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{bmatrix} = 2x_2^*$$

پارسم نمایش جریان سیستم فوق داریم:



آنچه که از نمایش ترسیمی بعد از قطری سازی بدست آمده است با حالت قبل کاملاً متفاوت است بنابراین باید گفت که این سیستم مشاهده پذیر نیست

نکته:

اگر تابع تبدیل سیستمی به صورت زیر باشد:

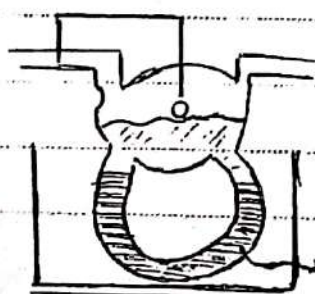
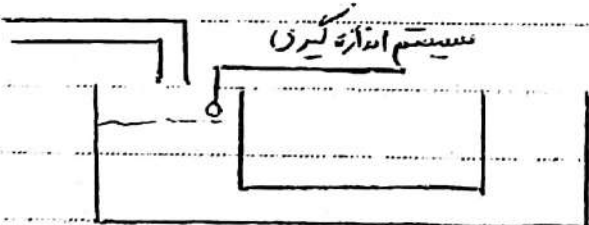
$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

این سیستم به خودی خود مشکلی ندارد، مشکل زمانی پیش می آید که بخواهیم برای این سیستم یک سیستم کنترلی تعریف کنیم زیرا در روش تابع تبدیل ممکن است یک مد حذف شود به همین خاطر ممکن است در جایی سیستم در حال انجام کار باشد ولی نتوانیم آن را مشاهده کنیم

$$G(s) = \frac{(s+2)}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s+1}$$

مثلاً اگر در سیستمی مد‌های صورت e^{-t} و e^{-3t} باشد از آنجایی که مد e^{-3t} خیلی سریعتر صفر می شود نمی توانو عملکرد این مد را مشاهده کرد.

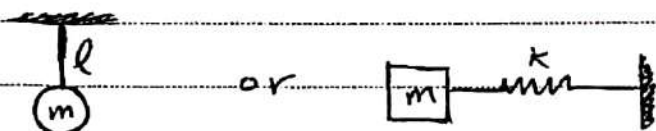
برای رفع مشکل فوق در سیستم های کنترلی از اندازه گیری استفاده می کنند



«برای توان های مختلف ممکن است سیستم ناپایدار گردد بنابراین باید با استفاده از یک سیستم اندازه گیری این ناحیه را به گونه ای به کمک ورودی از ناپایداری خارج نماییم»

پایداری سیستم‌های کنترلی :

همان طوری که از ارتعاشات به یار داریم در تحلیل ارتعاشات برای مثال اگر پاندولی آویزان به سقف داشتیم و آن را از حالت تعادل خارج می‌کردیم این سیستم حرکتی هارمونیک از خود نشان می‌داد.



$$x(t) = X \sin(\omega t + \phi)$$

$$\dot{x}(t) = X \omega \cos(\omega t + \phi)$$

با به توان ۲ رساندن هر کدام از روابطی فوق و جمع نمودن آنها داریم :

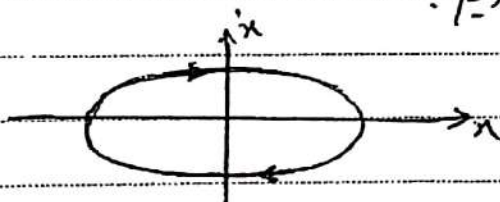
$$\frac{x^2}{X^2} = \sin^2(\omega t + \phi)$$

$$\frac{\dot{x}^2}{(X\omega)^2} = \cos^2(\omega t + \phi)$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{X^2} + \frac{\dot{x}^2}{(X\omega)^2} = 1$$

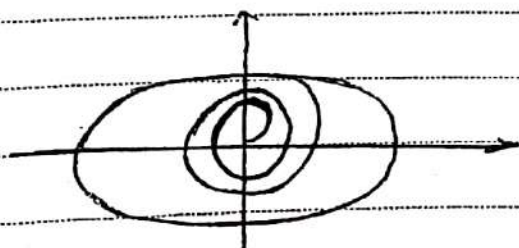
معادله بیضی

که با رسم معادله‌ی فوق در صفحه‌ی x و $\dot{x}$ داریم :

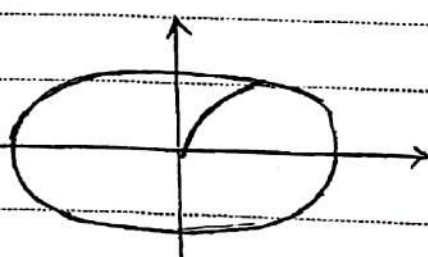


که به چنین صفحه‌ای صفحه‌ی فاز گویند.

اگر سیستم فوق میرا و over damped بود شکل آن به صورت زیر در می‌آید.

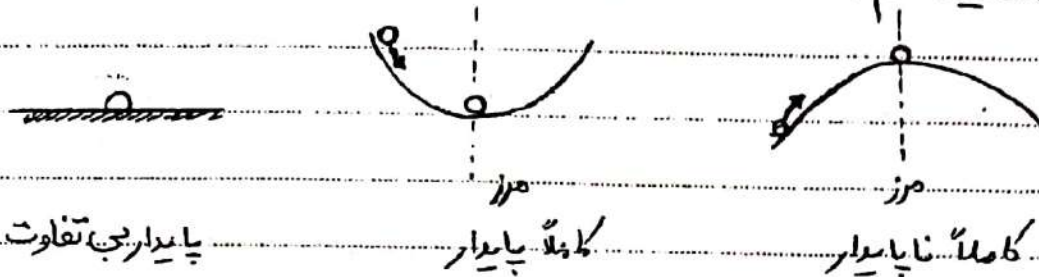


« حالت میرایی »



« حالت over damped »

حالات پایداری سیستم:



* بنابراین اگر بتوانیم صفه‌ی فاز سیستم را رسم نماییم مشخص می‌شود که آیا آن سیستم پایدار است یا خیر.

پایداری تفاوت $\Rightarrow$ اگر در مرکز بچرخد (۱)
کاملاً پایدار $\Rightarrow$ اگر به مرکز نزدیک شود (۲)
کاملاً ناپایدار $\Rightarrow$ اگر از مرکز دور شود (۳)

در صفه‌ی فاز رسم شده
با توجه به شکل سیستم (صفه‌ی
قل)

مثال) نمایش ترسیمی رفتار سیستم $\frac{dx}{dt} = Ax$ را با ورودی صفر و به صورتی که A به صورت زیر باشد تحت شرایط اولیه‌ی زیر بیابید.

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{6} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

$$x_0 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{ب}) \quad x_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \quad (\text{الف})$$

* ابتدا با استفاده از روش قطری سازی e^{At} را محاسبه می‌کنیم

$$\textcircled{\text{I}} \det(\lambda I - A) = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda + \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{6} & \lambda + \frac{3}{2} \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (\lambda + \frac{3}{2})^2 - \frac{1}{4} = (\lambda + 2)(\lambda + 1) = 0 \quad \left. \begin{array}{l} \text{مقادیر } \lambda = -1 \\ \text{و } \lambda = -2 \end{array} \right\}$$

$$\textcircled{\text{II}} (\lambda I - A)v^i = 0$$

$$\text{If } \lambda = -1 \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{r} & -\frac{r}{p} \\ -\frac{1}{p} & \frac{1}{r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} a=r \\ b=1 \end{cases} \Rightarrow v^1 = \begin{bmatrix} r \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{If } \lambda = -r \rightarrow \begin{bmatrix} -\frac{1}{r} & -\frac{r}{p} \\ -\frac{1}{p} & -\frac{1}{r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} a=r \\ b=-1 \end{cases} \Rightarrow v^r = \begin{bmatrix} r \\ -1 \end{bmatrix}$$

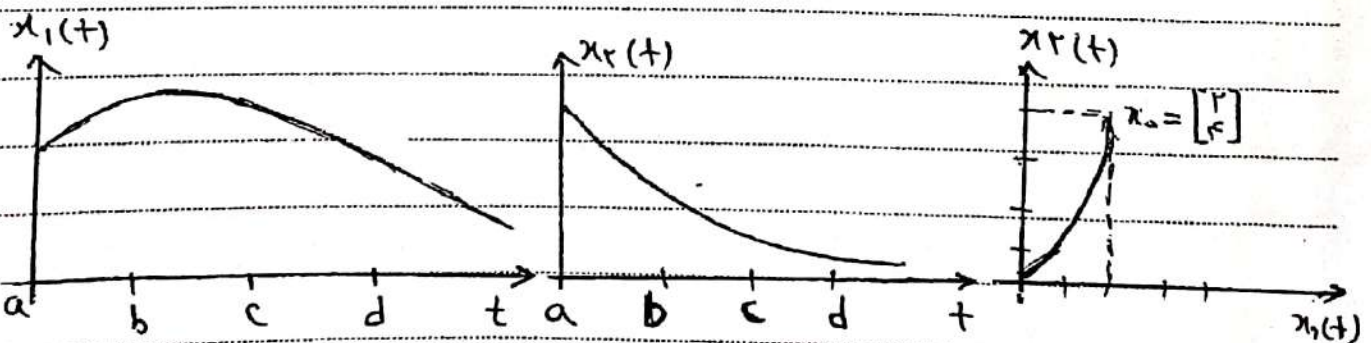
$$\textcircled{III}, \textcircled{IV} \quad T = \begin{bmatrix} r & r \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow T^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{r} & \frac{r}{p} \\ \frac{1}{r} & -\frac{r}{p} \end{bmatrix}$$

$$A = \text{ماتریس قطری مقادیر ویژه} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -r \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{طبق}]{\text{مربع}} e^{At} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-rt} \end{bmatrix}$$

$$\textcircled{V} \Rightarrow e^{At} = T e^{At} T^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{p}(e^{-t} + e^{-rt}) & \frac{r}{p}(e^{-t} - e^{-rt}) \\ \frac{1}{p}(e^{-t} - e^{-rt}) & \frac{1}{p}(e^{-t} + e^{-rt}) \end{bmatrix}$$

$$x_0 = \begin{bmatrix} r \\ r \end{bmatrix} \quad (\text{حالت اول})$$

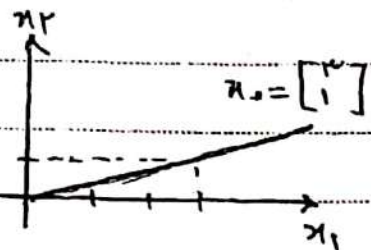
$$x(t) = e^{At} x_0 = \begin{bmatrix} v e^{-t} - \Delta e^{-rt} \\ \frac{v}{p} e^{-t} + \frac{\Delta}{p} e^{-rt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$



$$x_0 = \begin{bmatrix} r \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{حالت دوم})$$

$$x(t) = x_0 e^{At} = \begin{bmatrix} 3e^{-t} \\ e^{-t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

$$\frac{x_2(t)}{x_1(t)} = 3 \rightarrow x_2 = 3x_1$$



برای اینکه بفهمیم چرا نمودار $x_1 - x_2$ تحت این شرط اولیه به صورت خط راست درآمده است کافی به بردار ویژه v^1 که در صفی ۱۶ بدست آمده است توجه کنیم

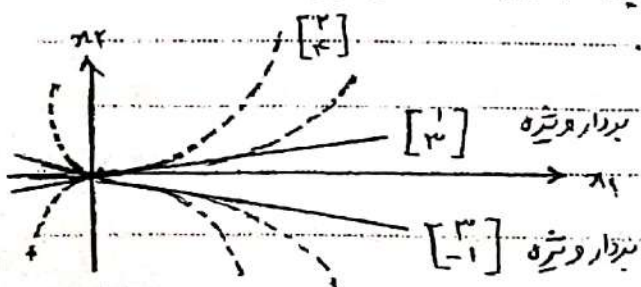
اگر نمودار حاصل از شرط اولیه $x^2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ را نیز رسم کنیم دوباره یک خط راست بدست می آید.

نتیجه‌ی مهمی که می توان بیان دست یافت این است که هر مسیر حرکت سیستم آزار (سیستم بدون ورودی) که از روی یک بردار ویژه شروع شود همواره بر روی همان بردار ویژه باقی می ماند تا به میرا مختصات برسد.

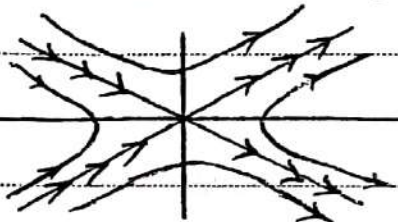
روش اینو گالین:

نمودی رسیدن به پاسخ در این روش در اینجا مطرح نمی گردد (قسمت فزنی) و تنها نتیجه‌ی آن را مطرح می کنیم.

طبق این روش برای آنکه بفهمیم یک سیستم چگونه رفتار می کند تنها کافی است بردارهای ویژه را بدست آوریم و نمودار $x_1 - x_2$ آن را رسم کرد و سپس از هر نقطه‌ای بر روی نمودار (تحت شرایط اولیه‌ی مختلف) که سیستم شروع به کار کند منحنی حاصل از آن شرط به بردار ویژه‌ی نزدیک تر می‌آید و بر روی آن مسیر شروع به حرکت می کند.



* به عنوان مثال دیگر فرض کنید بردار و بردارهای داریم که به مرکز نزدیک می شود و دیگری از آن دور می شود در این حالت برای نمایش منحنی حرکت سیستم در این حالت شکلی به صورت زیر خواهیم داشت:



مشکلی که این روش دارد این است که تا ۳ متغیر حالت می توان چنین سیستم هایی را رسم نمود ولی اگر تعداد متغیرها ۴ تا شود باید ۲ تا نمودار ۳ به ۳ رسم کرد و اگر تعداد متغیرها ۵ تا شود باید ۳ تا نمودار ۳ به ۳ رسم کرد و همین طور تا آخر...

$$\rightarrow 3 \text{ تا نمودار } 3 \text{ به } 3 : \binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!}$$

$$\rightarrow n \text{ تا نمودار } 3 \text{ به } 3 : \binom{n}{3} = \frac{n!}{3!(n-3)!}$$

و از آنجایی که این کار برای n متغیر حالت، کار عاقلانه ای نیست به همین خاطر از این روش برای n متغیر استفاده نمی شود.

پایداری حول نقطه تعادل:

فرض کنید سیستم ریاضیکی آزاد (بدون ورودی) با پارامترهای ثابت نسبت به زمان داشته باشیم که این سیستم می تواند غیر خطی یا خطی باشد. اگر بتوان سیستم را خطی نمود به ملوری که بتوان n متغیر حالت برای آن پیدا کرد یعنی:

$$\dot{x} = Ax$$

و یک نقطه تعادل داشته باشیم (مثلاً $x=0$) و یک شرط اولیه داشته باشیم $x(t=0) = x_0$.

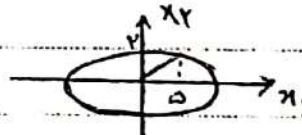
برای این سیستم با n متغیر حالت خواهیم داشت:

$$x = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]$$

که فاصله هر کدام از x_i ها تا مرکز برابر است یا:

$$\|x\|_{x \text{ نرم}} = (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)^{1/2} < R$$

$\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$ همواره یک مقدار ثابتی است به همین خاطر می توان یک در بالایی برای آن در نظر گرفت که در رابطه ی فوق R یک مقدار محدود، حقیقی و مثبت است

مثلاً  $\|x\| = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{29} < 6$

توجه:

در مورد سیستم های خطی شرط $\|x\| < R$ لازم نبوده و چون سیستم خطی تنها یک نقطه ی تعادل دارد، اگر سیستم حول این نقطه پایدار باشد، همواره پایدار خواهد ماند و پایداری سیستم به منطقه ی بخصوصی در اطراف نقطه ی تعادل محدود نمی شود.

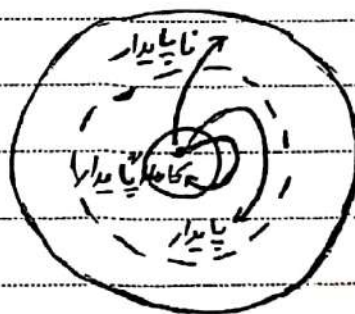
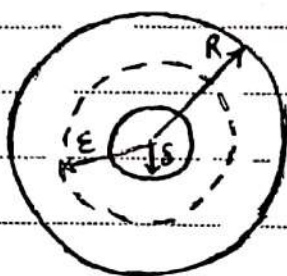
در مورد سیستم های غیر خطی شرط $\|x\| < R$ بیان کننده ی آن است که بررسی پایداری سیستم در داخل یک کره فضایی به مرکز صفر و به شعاع R (منطبق بر مرکز مضاعفات) انجام می شود.

روش لیا پانوف:

اصل لیا پانوف می گوید که:

اگر برای هر شعاع ϵ شعاعی مانند δ وجود داشته باشد به طوری که هرگاه مسیر حرکت سیستم از نقطه ی x_0 داخل (یا روی) کره فضایی با شعاع δ شروع شود و آنگاه مسیر حرکت همواره داخل (یا روی) کره فضایی

به شعاع ϵ باقی بماند و سیستم پایدار نخواهد بود



$$\delta < \epsilon < R$$

مثال) سیستم جرم و فنری به صورت زیر داریم با فرض اینکه این سیستم تحت شرایط اولیه x است پایداری آن را به روش لیا پانوف بیابید.



از ارتعاشات می دانیم که:

$$m\ddot{x} + kx = 0 \rightarrow mD^2x + kx = 0 \rightarrow D = \pm \left(\frac{k}{m}\right)^{1/2} j = \pm \omega j$$

$$\Rightarrow x(t) = c_1 e^{-\omega j t} + c_2 e^{\omega j t} = c_1 (\cos \omega t - j \sin \omega t) + c_2 (\cos \omega t + j \sin \omega t)$$

$$\Rightarrow x(t) = (c_1 + c_2) \cos \omega t + (c_2 - c_1) j \sin \omega t$$

$$= A \cos \omega t + B \sin \omega t$$

از طرفی:

$$A = C \sin \phi, \quad B = C \cos \phi \quad \& \quad C = (A^2 + B^2)^{1/2}$$

$$\Rightarrow x(t) = C (\sin \phi \cos \omega t + \cos \phi \sin \omega t) = C \sin(\omega t + \phi)$$

از طرفی می دانیم که مقیلهای حالت چپن سیستمی تغییر مکان و تغییر سرعت است پس کافی است $x(t)$ را بدست آوریم

$$x_1(t) = x(t) = C \sin(\omega t + \phi)$$

$$x_2(t) = \dot{x}(t) = C\omega \cos(\omega t + \phi)$$

و برای رسم $x_1 - x_2$ باید t را از روابط فوق حذف کنیم.

$$\left(\frac{x_1}{C} \right)^2 = \sin^2(\omega t + \phi)$$

$$\left(\frac{x_2}{C\omega} \right)^2 = \cos^2(\omega t + \phi) \quad \Rightarrow \quad \frac{x_1^2}{C^2} + \frac{x_2^2}{C^2\omega^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \text{معادله بیضی}$$

کافی است قطر کوچک بیضی را برابر شعاع δ و قطر بزرگ آن را برابر شعاع ϵ در نظر گرفت و R نیز شعاعی محدود و نیز کمتر از ϵ است.

از آنجایی که شرط اولیه از داخل یا روی δ شروع می شود و در نهایت بر روی بیضی قرار می گیرد (یعنی این سیستم از محدوده ای خارج نمی شود و به مرکز هم نزدیک نمی شود) پایدار است.



قانون اول و دوم لیاپانوف (کارشناسی ارشد):

اگر برای متغیرهای حالت سیستم بتوان تابع v را تعریف نمود به گونه ای که $v > 0$ و $\dot{v} < 0$ باشد سیستم پایدار خواهد بود.

$$\left. \begin{array}{l} v > 0 \\ \dot{v} < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{سیستم پایدار است (تابعی مشکل از متغیرهای حالت)}$$

مثال) آیا سیستم زیر پایدار است یا خیر؟

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = -2x_2 - x_1 \end{cases}$$

v را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$v = x_1^2 + x_2^2 \quad \rightarrow \quad \dot{v} < 0 \quad \text{شرط اول هاراق است}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{V} &= 2x_1 \dot{x}_1 + 2x_2 \dot{x}_2 \\
 &= 2x_1 (-x_1 + x_2) + 2x_2 (-2x_2 - x_1) \\
 &= -2x_1^2 + 2x_1x_2 - 4x_2^2 - 2x_1x_2 \\
 &= -2x_1^2 - 4x_2^2 = -2(x_1^2 + 2x_2^2) < 0
 \end{aligned}$$

در نتیجه شرط دوم هم برقرار بوده و سیستم پایدار است.

توجه:

اصل لیاپانوف زمانی مد نظر قرار می گیرد که شرایط اولیه برای سیستم تعریف شده باشد. در واقع اصل صفه‌ی فاز هم بر مبنای شرایط اولیه بنا شده است.

سیستم کاملاً پایدار (حالت تعادل صفر):

حالت تعادل صفر کاملاً پایدار است اگر

اولاً پایدار باشد

ثانیاً هر مسیر حرکتی که از داخل کره‌ی فضای به شعاع δ شروع می شود نهایتاً

($\infty \rightarrow +$) به مبدا مخرقات فضای برگردد

به عبارتی داشته باشیم:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = 0$$

سیستم پایدار BIBO:

یک سیستم با شرایط اولیه صفر پایدار گویند اگر:

به ازای هر ورودی با دامنه‌ی محدود، دامنه‌ی کلیس العمل (خروجی) سیستم

نیز محدود باشد در این صورت چنین سیستمی پایدار BIBO گویند

BIBO = Bounded Input Bounded Output

نکته:

یک سیستم ممکن است با تعریف لیاپانوف پایدار باشد ولی پایدار BIBO نباشد.

مثلاً در مثال جرم و فنر صفحه‌ای ۹۵ از آنجایی که سیستم دارای ورودی محدود و خروجی محدود نیست پایدار BIBO نیست. دلیل آن هم این است که وقتی به سیستم مورد نظر ورودی سینوسی داده شود در صورت برابر شدن فرکانس ورودی و فرکانس طبیعی سیستم (یا پذیره‌ی تشدید روی داده و خروجی محدود نخواهد بود اگرچه ورودی اعمالی محدود بوده است.

نکته:

اصل پایداری لیاپانوف برای سیستم‌های خطی را زمانی مطرح می‌کنیم که اگر سیستمی به صورت $\dot{x} = Ax$ داشته‌یم پس از محاسبه‌ی مقادیر ویژه‌اشته باشیم: $\lambda_i \leq 0$ ، در چنین حالتی سیستم پایدار است.

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

سیستم به سمت مرکز می‌رود (کاملاً پایدار) $\lambda_i < 0$
 If $\lambda_i = 0 \pm j\omega$ پایدار
 $\lambda_i > 0$ ناپایدار

قضیه:



معادلات حالات زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

(روی صفر)

هر سیستمی با معادلات حالت فوق کاملاً پایدار است اگر و تنها اگر همه‌ی مقادیر ویژه‌ی ماتریس A دارای قسمت حقیقی منفی باشد و این سیستم در این

حالت پایدار BIBO هم می باشد.

تعیین پایداری سیستم های خطی با استفاده از روش Routh test :
معادله مشغله یک سیستم رستری n به صورت زیر است :

$$G(s) = \frac{A(s)}{B(s)} \quad A(s) = \det(SI - A) = 0$$

$$A(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

در رابطه فوق باید ضرایب a_0 تا a_n مثبت باشند

$$a_i > 0 \quad i = 0, 1, \dots, n$$

اگر ضرایب فوق مثبت نباشند سیستم پایدار نبوده (همی ریشه ها دارای قسمت حقیقی مثبتی نیستند) ولی در صورت مثبت بودن باید مراحل طی شود

مرحله ۱ :

ابتدا باید در وسط تشکیل شود که در سطر اول، اولین ضریب a_0 یا ضریب s^n نوشته شده و سایر اعداد سطر یک در میان شامل ضرایب دیگرند و در سطر دوم، اولین ضریب a_1 یا ضریب s^{n-1} نوشته شده و سایر اعداد سطر یک در میان شامل ضرایب دیگرند

	ستون ۱	ستون ۲	ستون ۳	ستون ۴
s^n	a_0	a_2	a_4	a_6
s^{n-1}	a_1	a_3	a_5	a_7
!				

مرحله ۲ :

سطر قری به صورت زیر بدست می آید :

$$s^{n-2} \quad b_1 \quad b_2 \quad b_3 \quad b_4$$

$$b_i = \frac{\begin{vmatrix} \text{ردیف اول ستون} & \text{ردیف اول ستون} \\ \text{اول ستون} & \text{بالا و سمت راست} \\ \text{اول} & \text{عدد } i \text{ تا} \end{vmatrix}}{\text{اولین عدد سطر بالایی}} \times (-1)$$

$$b_1 = - \frac{\begin{vmatrix} a_3 & a_4 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}}{a_1}, \quad b_2 = - \frac{\begin{vmatrix} a_3 & a_4 \\ a_1 & a_5 \end{vmatrix}}{a_1}$$

$$b_3 = - \frac{\begin{vmatrix} a_3 & a_4 \\ a_1 & a_6 \end{vmatrix}}{a_1}, \quad \dots$$

مرحله ۳:

مقادیر $c_1, c_2, c_3, \dots$ (در سطر بعدی) نیز همانند بالا بدست می آید:

$$c_1 \quad c_2 \quad c_3 \quad \dots$$

$$c_1 = - \frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}{b_1}, \quad c_2 = - \frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_5 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}}{b_1}, \quad \dots$$

مرحله ۴:

در نهایت جدولی به صورت زیر داریم:

S^1	a_3	a_2	a_4	a_5	$\dots$	0
S^{n-1}	a_1	a_6	a_5	a_7	$\dots$	0
S^{n-2}	b_1	b_2	b_3	b_4	$\dots$	0
S^{n-3}	c_1	c_2	c_3	c_4	$\dots$	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
S^1	d_1	0	0	0	$\dots$	0
S^0	e_1	0	0	0	$\dots$	0

↑
ستون اول

مرحله ۵: تشخیص پایداری سیستم:

اگر تمامی مقادیر ستون اول مثبت باشند سیستم کاملاً پایدار است (یعنی مقادیر ویژه منفی دارد). اگر چند تا از ضرایب ستون اول منفی باشند به ازای هر تغییر علامت در سیستم یک ریشه‌ی ناپایدار وجود دارد.
(مثلاً)

$$a_0 +$$

$$a_1 +$$

$$b_1 - > 0$$

$$c_1 + > 0$$

$\Rightarrow$ ۲ ریشه ناپایدار $\Rightarrow$ (ولی این روش نمی‌تونه که این دورریشه کرانند)

یعنی این اعداد مقدارریشه نیستند

به همین خاطر فقط این روش این است که در مورد اطلاعات سیستم چیزی در اختیار من گزارر و فقط در مورد پایداری سیستم بحث می‌کنه.

مثال) اگر معادله‌ی مشخصه‌ی سیستمی به صورت زیر باشد، پایداری آن را با استفاده از روش روات بررسی کنید.

$$\text{الف) } A(s) = 4s^7 + 3s^6 + 41s^5 + 14s^4 + 24s^3 + 14s^2 + 14s + 2 = 0$$

$$\text{ب) } A(s) = s^4 + 2s^3 + s^2 + 4s + 4 = 0$$

ستون اول

* برای حالت الف داریم:

s^7	4	41	24	14
s^6	3	14	14	2
s^5	9	22	8	0
s^4	3	10	2	0
s^3	2	4	0	0
s^2	4	2	0	0
s^1	4	0	0	0
s^0	2	0	0	0
	0	0	0	0

چون تمام ضرایب ستون اول

مثبتند سیستم مورد نظر

پایدار است

چند نمونه حل

$$* = - \frac{\begin{vmatrix} 9 & 48 \\ 3 & 14 \end{vmatrix}}{3} = - \frac{1}{3} (9 \times 14 - 3 \times 48) = 6$$

و به همین ترتیب:

$$** = - \frac{\begin{vmatrix} 9 & 44 \\ 3 & 14 \end{vmatrix}}{3}$$

$$* = - \frac{\begin{vmatrix} 3 & 14 \\ 2 & 22 \end{vmatrix}}{4}$$

$$** = - \frac{\begin{vmatrix} 3 & 14 \\ 2 & 8 \end{vmatrix}}{2}$$

* برای حالت دوم داریم:

s^4	1	1	4
s^3	2	4	0
s^2	1	4	0
s^1	12	0	0
s^0	4	0	0

سیستم ۲ ریشه ی ناپایدار دارد

ولی با استفاده از این روش

مقدار ریشه ها مشخص نمی شود

رفع مشکلات استفاده از روش رouth:

I در صورتی که یکی از ضرایب ستون اول صفر شود (به جز آخری) این عامل سبب می شود که ضرایب ستون بعدی بی نهایت شود برای رفع این مشکل سه روش وجود دارد.
روش اول: قرار دادن مقدار بسیار کوچک ϵ به جای صفر.

مثال: پایداری سیستم با مقادیری مشخصه زیر را با روش رouth بررسی کنید.

$$A(s) = s^5 + 2s^4 + 4s^3 + 8s^2 + 3s + 2 = 0$$

s^5	1	4	3
s^4	2	8	2
s^3	ϵ	2	0

$b_1 = 0$

به جای صفر مقدار ϵ قرار می دهیم

به طوری که $\epsilon \rightarrow 0^+$ میل کند

$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+}$

Sina Sanedoust

$$\begin{array}{c|cc|c} S^2 & 1 - \frac{r}{E} & & 2 \\ S^1 & 2 - \frac{2E}{1 - \frac{r}{E}} & & 0 \\ S^0 & 2 & & 0 \\ & 0 & & 0 \end{array}$$

$$a = \lim_{E \rightarrow 0^+} 1 - \frac{r}{E} = -\infty$$

$$b = \lim_{E \rightarrow 0^+} 2 - \frac{2E}{1 - \frac{r}{E}} = \lim_{E \rightarrow 0^+} 2 - \frac{2E^2}{1E - r} = 2 + \frac{0}{r} = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} S^2 & + & > \textcircled{1} \\ S^1 & - & > \textcircled{2} \\ S^0 & + & > \textcircled{3} \end{cases} \Rightarrow \text{ریشه پایدار دارد}$$

روش دوم) تبدیل S به $\frac{1}{p}$ در معادله مشخصه:
در این روش S را به $\frac{1}{p}$ تبدیل کرده و سپس معادله حاصل را در p^n ضرب کرده و در نهایت از روش روات استفاده می‌کنیم.

مثال) معادله مشخصه مثال قبل را در نظر گرفته و پایداری آن را به روش دوم بیان کنید.

$$S \rightarrow \frac{1}{p}$$

$$\left(\frac{1}{p}\right)^5 + 2\left(\frac{1}{p}\right)^4 + 4\left(\frac{1}{p}\right)^3 + 1\left(\frac{1}{p}\right)^2 + 3\left(\frac{1}{p}\right) + 2 = 0$$

$$\Rightarrow 2p^5 + 3p^4 + 1p^3 + 4p^2 + 2p + 1 = 0$$

$$\begin{array}{c|cc|c} p^5 & 2 & 1 & 2 \\ p^4 & 3 & 4 & 1 \end{array}$$

p^4	14	4	0
p^3	3	1	0
p^1	3	0	0
p^0	1	0	0
	0		

سیستم ناپایدار است $\Rightarrow$

روش سوم) ضرب کردن معادله‌ی مشخصه در $(S+1)$.

مثال) پایداری سیستم با معادله‌ی مشخصه در روش اول قبل را به روش سوم بررسی کنید.

$$(S+1)(S^5 + 2S^4 + 4S^3 + 8S^2 + 3S + 2 = 0)$$

$$\Rightarrow S^6 + 3S^5 + 6S^4 + 12S^3 + 11S^2 + 5S + 2 = 0$$

S^6	1	4	11	2
S^5	3	12	5	0
S^4	2	28/3	2	0
S^3	-2	2	0	
S^2	34/3	2	0	
S^1	10/3	0		
S^0	2	0		
	0			

(II) در صورتی که تمامی اعضای سطرهای سطرهای صفر شود (به جز سطر آخر) و این امر مانع از تشکیل سطرهای بعدی شود، باید از معادله‌ی کمکی استفاده کرد که معادله‌ی کمکی عبارت است از معادله‌ای بر حسب S با ضرایب و مرتبه‌های متناظر

بازرسی S سطر ما قبل سطر صفر.
حال مطابق مراحل زیر به رفع مشکل صفر شدن تمام اعضای یک سطر جدول
رواژ می پردازیم:

۱. ابتدا معادله ککی را تشکیل می دهیم
۲. از معادله ککی نسبت به S مشتق می گیریم
۳. ضرایب معادله حاصله (مشتق معادله ککی) را به جای اعضای سطر
صفر قرار می دهیم.
- * ریشه های معادله ککی ریشه های معادله اصلی هم هستند.

مثال) پایداری سیستم با معادله مشخصه زیر را به روش رواژ بررسی کنید.

$$S^4 + 2S^3 + 11S^2 + 18S + 18 = 0$$

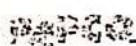
S^4	1	11	18
S^3	2	18	0
S^2	2	18	0
S^1	0	0	0
S^0			???

این حالت زمانی اتفاق می افتد که در ریشه روی محور موهومی داشته
باشیم:

$S = \pm j\omega$
یعنی سیستم پایدار است ولی یکی از ریشه ها روی مرز است و در این حالت
یکی از ریشه ها صفر می شود.

$$S^2 \quad 2 \quad 18 \quad 0 \Rightarrow 2S^2 + 18 = 0 \text{ معادله ککی}$$

$$p(s) = S^2 + 9 = 0 \Rightarrow S = \pm 3j \text{ ریشه های معادله اصلی}$$



$$\frac{dP(s)}{ds} = 2s + 0$$

ضرایب سطر بعدی $\Rightarrow$ ضرایب معادله

$$S^4 \quad 1 \quad 11 \quad 18 \quad /$$

$$S^3 \quad 2 \quad 18 \quad 0 \quad /$$

$$S^2 \quad 2 \quad 18 \quad 0 \quad /$$

$$S^1 \quad 2 \quad 0 \quad /$$

$$S^0 \quad 18 \quad 0 \quad /$$

مثال) اگر ضرایب سطر بعدی S^4 در مثال قبل صفر شود معادله ای کمکی و ضرایب معادله ای بعدی را بیابید.

$$S^4 \quad 1 \quad 11 \quad 18 \quad 0$$

نکته: معادله ای کمکی: $S^4 + 11S^2 + 18 = 0$

ضرایب معادله ای بعدی: $4S^3 + 22S + 0 = 0 \Rightarrow 4 \quad 22 \quad 0$

نکته: حالت صفر شدن یک سطر در صورتی که ریشه ها دوجور باشند که این دو عدد قرینه یکدیگرند نیز اتفاق خواهد افتاد.

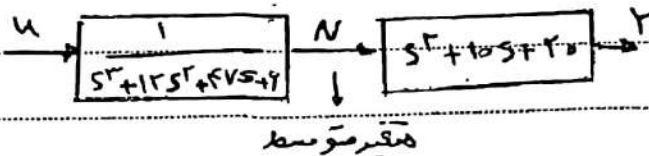


* این سیستم ها، سیستم های خاصی هستند که در چنین مواقعی معمولاً از روش رouth استفاده نمی کنند. و باید دانست این گونه سیستم ها از لحاظ ریاضی امکان تشکیل شدن نشان وجود ندارد.

نکته:

در اینجا جادار روش محاسبه ی مقادیر حالت از تابع تبدیل با مثالی شرح داده شود

$$\frac{Y}{U} = \frac{s^2 + 10s + 20}{s^2 + 12s^2 + 47s + 4}$$



هر دلی اول)

$$\frac{N}{U} = \frac{1}{s^2 + 12s^2 + 47s + 4} \quad \textcircled{I}$$

توان ۳ نشان ی دهر ۳ مقدار داریم

مقدورها را به صورت زیر نام گذاری می کنیم:

$$x_1 = N \rightarrow \dot{x}_1 = \dot{N} = x_2$$

$$x_2 = \dot{N} \rightarrow \dot{x}_2 = \ddot{N} = x_3$$

$$x_3 = \ddot{N} \rightarrow \dot{x}_3 = \dddot{N} = -12x_3 - 47x_2 - 4x_1 + U$$

زیرای را بنویسیم

$$\textcircled{I} \quad U = s^2 N + 12s^2 N + 47s N + 4 = \ddot{N} + 12\ddot{N} + 47\dot{N} + 4$$

هر دلی دوم)

$$\frac{Y}{N} = s^2 + 10s + 20$$

$$\Rightarrow Y = s^2 N + 10s N + 20N = \ddot{N} + 10\dot{N} + 20N = x_3 + 10x_2 + 20x_1$$

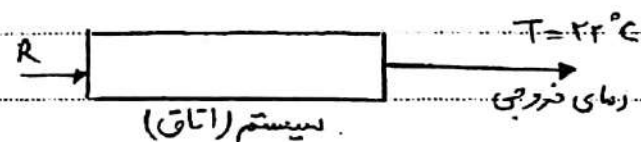
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & -47 & -12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} U$$

$$Y = \begin{bmatrix} 20 & 10 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

« فصل ششم »

کنترل فیدبک :

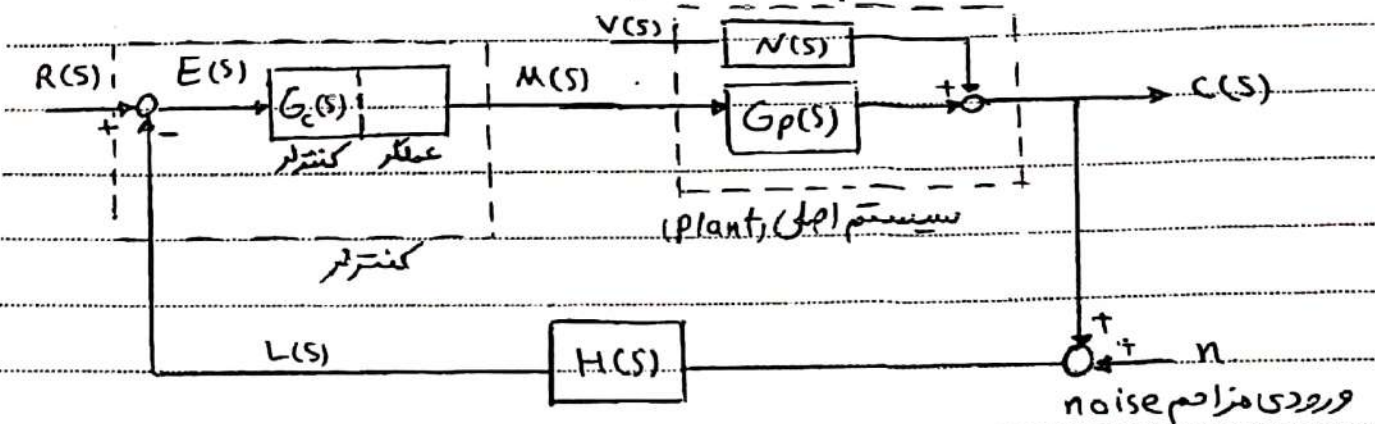
در مقدمه خوب است اتاق را به عنوان سیستم در نظر بگیریم که می خواهیم (مای آن را بر روی 22°C نگه داریم).



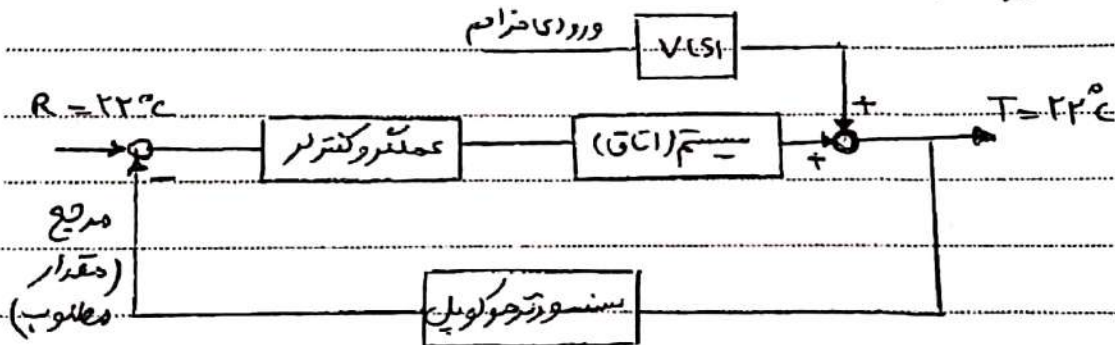
اگر بخواهیم در سیستمی همانند سیستم فوق (ما را ثابت نگه داریم از یک ترموکوپل استفاده می نماییم و از آنجایی که می خواهیم مقدار (مای مرجع یا مطلوب) (در اینجا 22°C) را داشته باشیم (در حالت کلی R یا T می تواند هر مقدار دلخواهی باشد) و چون سیستم گرمایش (رای) خطای باشد و همان مقدار مورد نظر را بدست نمی دهد باید از مکانیزمی استفاده نمود که این گرمایش را ایجاد نماید این کار توسط کنترلر انجام می گیرد که خود آن شامل هیترها، پیلرها، ترمال ها و ... می باشد خود کنترلر به دو بخش عملگر و کنترلر اصلی تقسیم می شود (هیترها، پیلرها را به عنوان عملگر در نظر می گیرند) ، البته باید به این نکته هم توجه داشت که برای کنترل (مای اتاق) گرمای داده شده به سیستم اتاق تنها از طریق دستگاه مورد نظر انجام نمی شود بلکه عوامل دیگری چون درو پنجره و ... بر روی دمای اتاق تأثیر می گذارند که باعث تغییر دما می شوند که به آنها ورودی های مزاحم یا disturbance گویند و همچنین باید دانست که پروژنیل تغییر دما به محل قرار گرفتن درو پنجره مربوط می شوند.

ورودی مزاحم دیگری وجود دارد که به آن نویز گویند که این ورودی مزاحم در سیستم های الکتریکی وارد می شوند مثلاً اگر یک موبایل را در کنار یک ترموکوپل قرار دهیم به محض اینکه موبایل شروع به زنگ زدن کند به سیستم اختلال داده می شود که دما بالا رفته است.

نمایش و سافت‌مان یک سیستم کنترل فیدبک



مثلاً برای اتاق مورد نظر:



مفهوم نما‌دهای بکار رفته در شکل اصلی عبارتند از:

$C(s)$: مقیاری است که باید کنترل (طبق تعریف همان خروجی سیستم است)

$R(s)$: ورودی مبنا یا نقطه‌ی تنظیم یا مقدار مطلوب نامیده می‌شود.

$G_p(s)$: تابع تبدیل سیستم اصلی (سیستمی که می‌خواهیم آن را کنترل کنیم) است.

$V(s)$: ورودی مزاحم به سیستم.

$N(s)$: تابع تبدیل ورودی مزاحم به سیستم.

$M(s)$: ورودی کنترل شده به سیستم اصلی.

$E(s)$: سیگنال خطای سیستم.

$G_c(s)$: تابع تبدیل مربوط به کنترلر سیستم.

$H(s)$: تابع تبدیل مدار فیدبک و معمولاً مربوط به دستگاه اندازه‌گیری خروجی است.

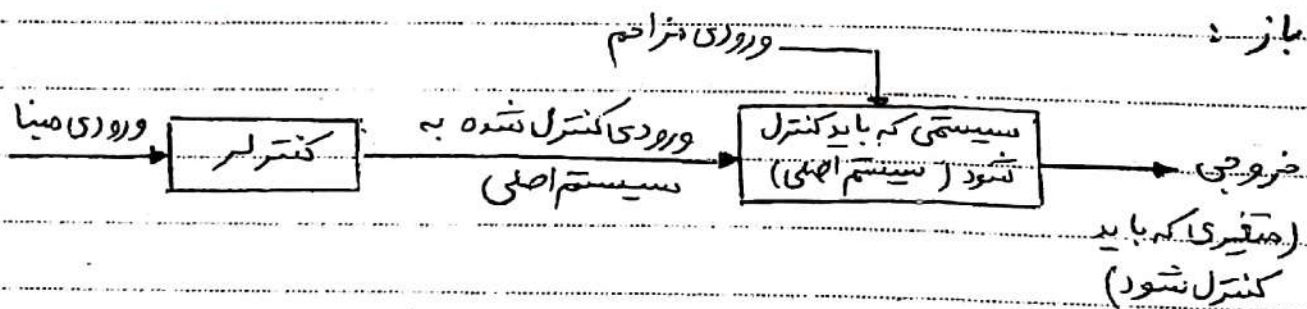
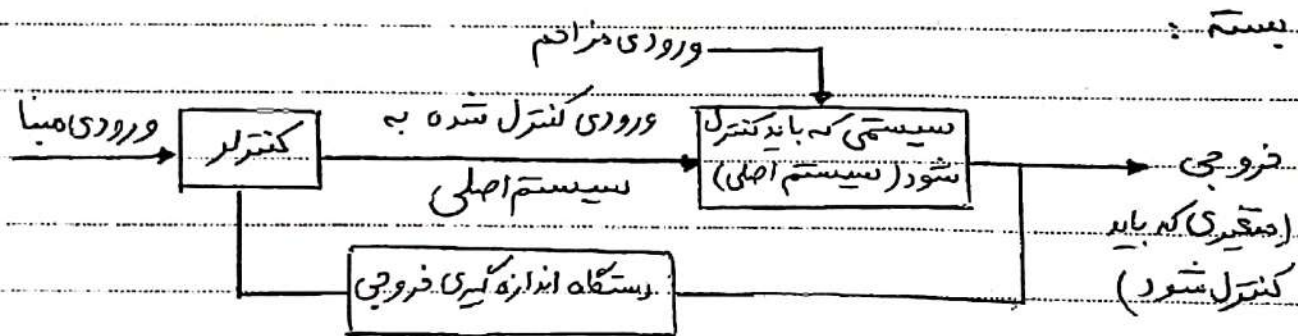
$L(s)$: مسین سیگنال فیدبک است.

هدف این سیستم ها این است که خروجی $C(s)$ (یعنی مقیری که باید کنترل شود) حتی المقدور به ورودی مبای $R(s)$ (که مقدار مطلوب و مورد نظری است) نزدیک باشد.

* به طور کلی دو عامل می تواند باعث تغییرات نامطلوب در خروجی سیستم شود که عبارتند از:

الف) تغییر پارامترهای سیستم اصلی
ب) تأثیر ورودی مزاحم یا disturbance

نمای شماتیک سیستم های کنترلی مدار باز و بسته :

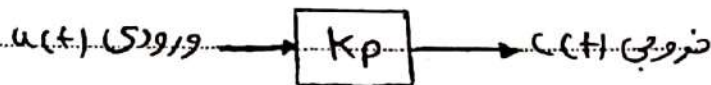


در سیستم های کنترلی مدار بسته علاوه بر خود کار بودن کنترل خروجی دو مزیت عمده دیگر نسبت به سیستم کنترلی مدار باز وجود دارد که عبارتند از:

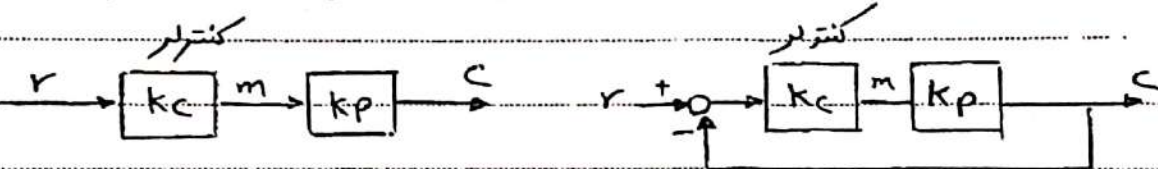
۱. اثر ورودی های مزاحم در سیستم کنترل مدار بسته بسیار کمتر از اثر آنها در سیستم کنترلی مدار باز است.
۲. حساسیت سیستم کنترلی مدار بسته نسبت به تغییرات پارامترها خیلی کمتر از سیستم

کنترلی مدار باز است.

مثال) فرض کنید سیستم اصلی یا سیستمی که باید کنترل شود یک سیستم استاتیکی به صورت زیر باشد. هدف اصلی از کنترل سیستم در اینجا این است که خروجی حتی المقدور مساوی یا نزدیک به مقدار ثابت r شود. سیستم کنترلی را برای دو حالت کلی مدار باز و مدار بسته برای شرایط ورودی مزاحم و تغییر در پارامترها بررسی کنید.



ابتدا سیستم های کنترلی مدار باز و بسته را به صورت زیر در نظر می گیریم:



« open-loop control »

« closed-loop control »

$$C = r$$

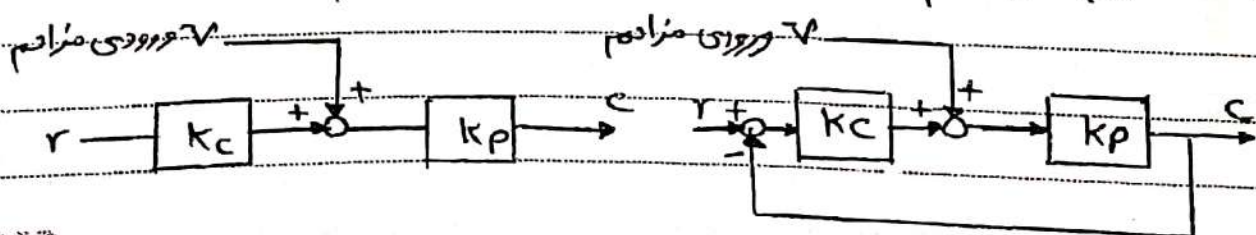
خواهیم داشت:

$$C = K_p \cdot K_c \cdot r \Rightarrow K_c = \frac{1}{K_p}$$

$$\text{حلقه بسته: } \frac{C}{r} = \frac{K_c K_p}{1 + K_c K_p}$$

$$\text{If } K_c \gg \frac{1}{K_p} \Rightarrow \frac{K_c K_p}{K_p (\frac{1}{K_p} + K_c)} = 1 \quad \checkmark \Rightarrow \begin{cases} K_c K_p \gg 1 \\ \text{or} \\ K_c \gg \frac{1}{K_p} \end{cases}$$

حالت اول) سیستم کنترلی مدار باز و بسته با ورودی مزاحم disturbance:



Page 106

Sina SD 619

$$\text{حلقه‌ی باز: } C = k_p (k_c r + v) = k_p k_c r + k_p v$$

$$\text{حلقه‌ی بسته: } C = G_r r + G_v v$$

$$G_r = \frac{k_c k_p}{1 + k_c k_p} \quad \& \quad G_v = \frac{k_p}{1 + k_c k_p}$$

$$\Rightarrow C = \frac{k_c k_p}{1 + k_c k_p} r + \frac{k_p}{1 + k_c k_p} v$$

در بهترین حالت داریم:

$$\text{حلقه‌ی باز If } k_c = \frac{1}{k_p} \Rightarrow C = r + k_p v$$

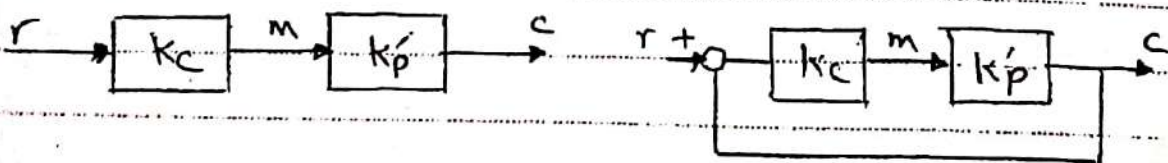
$$\text{حلقه‌ی بسته If } k_c \gg \frac{1}{k_p} \Rightarrow C = \frac{k_c k_p}{k_p (\frac{1}{k_p} + k_c)} r + \frac{k_p}{k_p (\frac{1}{k_p} + k_c)} v$$

$$\Rightarrow C \approx \frac{k_c}{k_c} r + 0 v \rightarrow C \approx r$$

کلاً صفر می‌شود
 $k_c \gg \frac{1}{k_p}$

بنابراین ملاحظه می‌شود که در سیستم مدار باز، مقدار عکس‌العمل C مساوی r نبوده بلکه اثر ورودی مزاحم بر سیستم به صورت $k_p v$ به آن اضافه شده است و کنترلر k_c نقشی در کم کردن ورودی مزاحم در سیستم ندارد. در صورتی که در سیستم مدار بسته با انتخاب صحیح مقدار k_c (در اینجا با بزرگ کردن مقدار k_c) می‌توان اثر ورودی مزاحم را به حداقل رساند. (مزیت ۱)

حالت دوم: سیستم کنترلی مدار باز و بسته با تغییر پارامترها (نامفین‌ها):



فرض می‌کنیم که K_p در سیستم اصلی به اندازه ۱۰٪ تغییر نماید (بزرگ شود) پس مقدار جدید K_p (یعنی K_p') برابر است با:

$$K_p' = 1.1 K_p$$

حلقه باز: If $K_c = K_p$

$$C = K_p' K_c r = 1.1 K_p \left(\frac{1}{K_p} \right) r = 1.1 r$$

حلقه بسته: If $K_c \gg \frac{1}{K_p}$

$$C = \frac{K_c K_p'}{1 + K_c K_p'} r + 0 \cdot r = \frac{K_c (1.1 K_p)}{1 + (K_c) (1.1 K_p)} r = \frac{K_p' 1.1 K_c}{K_p \left(\frac{1}{K_p} + 1.1 K_c \right)} r$$

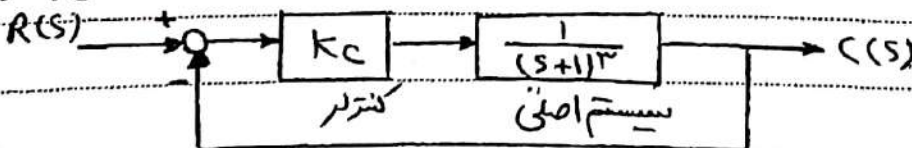
$$\Rightarrow C \approx r$$

بنابراین ملاحظه می‌شود که در سیستم مدار باز وقتی پارامترهای سیستم اصلی ۱۰٪ بزرگ شود، خروجی سیستم (یعنی C) نیز به اندازه ۱۰٪ از مقدار مطلوب آن (یعنی r) فاصله می‌گیرد. در حالی که در سیستم‌های مدار بسته تغییر پارامتر ورودی تأثیر کمی بر مقدار خروجی می‌گذارد.

مثال) در سیستم شکل زیر توابع تبدیل به صورت $G_p(s) = \frac{1}{(s+1)^3}$ و $G_c(s) = K_c$ و $H(s) = 1$ می‌باشند.

اولاً بر مورد (وقت این سیستم کنترلی یعنی نزدیک بودن عکس العمل سیستم $C(t)$ به ورودی مبدأ $r(t)$ بر حسب مقایسه مختلف K_c بحث کنید. ثانیاً پایبندی سیستم مدار بسته را بررسی کنید.

تابع پله واحد



$$\frac{C}{R} = \frac{\frac{k_c}{(1+s)^3}}{1 + \frac{k_c}{(1+s)^3}} = \frac{k_c}{(s+1)^3 + k_c}$$

اگر ورودی تابع پله واحد یعنی $r(t) = 1$ یا $R(s) = \frac{1}{s}$ باشد مقدار نهایی خروجی

یعنی $C(t)$ نیز باید برابر واحد شود

$$C_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} s C(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{k_c}{(s+1)^3 + k_c} \cdot \frac{1}{s} = \frac{k_c}{1+k_c}$$

این رابطه نشان می دهد که رقت کنترل در سیستم مدار بسته بستگی به انتخاب k_c دارد و برای آنکه خروجی کاملاً مساوی ورودی شود باید $k_c \rightarrow \infty$ میل کند.

k_c	1	4	8	99	999	∞
مقدار نهایی $C(t)$	0.5	0.8	0.88	0.99	0.999	1
رشد قطعی نهایی	50%	20%	12%	1%	0.1%	0.0%

باید توجه داشت که در واقعیت نمی توان k_c را به مقدار زیادی افزایش داد زیرا سیستم دارای محدودیت هایی است. یعنی اگر پایداری را با افزایش k_c بهبود بخشیم خواهیم دید که

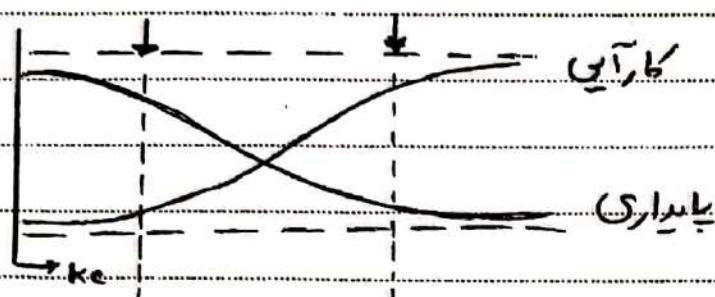
$$A(s) = s^3 + 3s^2 + 3s + 1 + k_c = 0$$

s^3	1	3	
s^2	3	1+k _c	
s^1	$\frac{1-k_c}{3}$	0	
s^0	1+k _c		

برای آنکه سیستم پایدار باشد:

$$\begin{cases} 1+k_c > 0 \rightarrow k_c > -1 \\ 1-k_c > 0 \rightarrow k_c < 1 \end{cases} \Rightarrow -1 < k_c < 1 \Rightarrow k_c < 1$$

اگر نمودار کارآیی و پایداری سیستم را رسم کنیم داریم:



همان طوری که ملاحظه می شود با افزایش پایداری، کارآیی سیستم کاهش می یابد. بنابراین در طراحی سیستم های کنترلی باید به دنبال مقداری از کنترلر بود که ضمن حفظ پایداری سیستم، کارآیی خوبی نیز داشته باشد.

پاسخ گذر از پاسخ حالت ماندگار:

پاسخ زمانی یک سیستم شامل دو بخش است. پاسخ گذرا و پاسخ ماندگار.

$$c(t) = c_{tr}(t) + c_{ss}(t)$$

c_{tr} : پاسخ گذرا: عبور از حالت ابتدایی تا رسیدن به حالت نهایی

c_{ss} : پاسخ حالت ماندگار: چگونگی رفتار سیستم به ازای $t \rightarrow \infty$ است.

پایداری مطلق، پایداری نسبی و خطای حالت ماندگار:

مهم ترین مشخصه ی رفتار دینامیکی سیستم کنترل پایداری مطلق است یعنی

آیا سیستم پایدار است یا ناپایدار.

یک سیستم کنترل در حالت تعادل است اگر در صورت نبودن ورودی و اغتشاش

خروجی در یک حالت باقی بماند.

یک سیستم کنترل خطی مستقل از زمان پایدار است در صورتی که هنگام اعمال

یک شرط اولیه ی جدید به آن سرانجام به حالت تعادل بازگردد.

یک سیستم کنترل خطی مستقل از زمان پایدار خطی است اگر نوسانات خروجی

برای همیشه ارامه یابد.

این سیستم در صورتی ناپایدار است که هنگام اعمال یک شرط اولیه جدید به آن خروجی اش به طور بی کران واکرا شود.
اگر خروجی سیستم در حالت ماندگار، دقیقاً همان ورودی نباشد، می نویسیم سیستم خطای حالت ماندگار دارد.

رفتار یا عکس العمل سیستم ها :

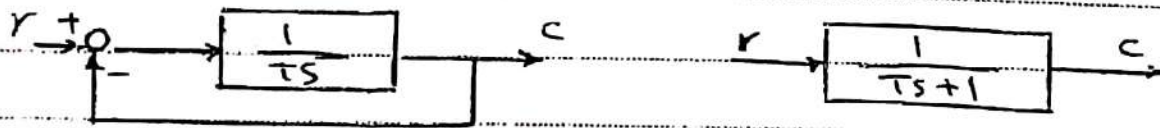
I. سیستم مرتبه ی اول :
سیستم مانند زیر که می توان یک مدار RC - یک سیستم حرارتی یا هر سیستم مشابه باشد را در نظر بگیریم.

می خواهیم پاسخ این سیستم را تحت ورودی های استاندارد زیر بررسی کنیم

۱. ورودی پله ی واحد

۲. ورودی ضربی واحد

۳. ورودی شیب واحد یا Ramp : $u(t) = t$



$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{Ts+1}$$

۱. ورودی پله ی واحد : $R(s) = \frac{1}{s}$

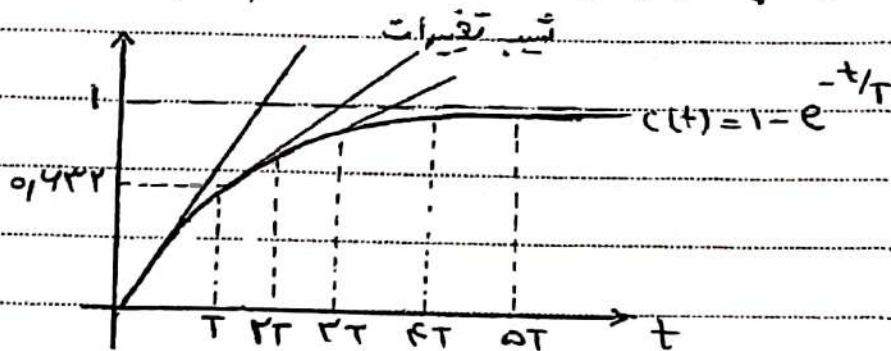
$$C(s) = \frac{1}{Ts+1} \cdot \frac{1}{s}$$

$$= \frac{1}{s} - \frac{T}{Ts+1} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + (1/T)}$$

در نتیجه اگر عکس (ایلاکس) بگیریم داریم :

$$c(t) = 1 - e^{-t/T}$$

حال می‌توانیم پاسخ $c(t)$ را نسبت به زمان‌های مختلف رسم کنیم:



$$t = 0 \rightarrow c(t) = 1 - e^0 = 1 - 1 = 0$$

$$t = T \rightarrow c(t) = 1 - e^{-1} = 0.432$$

$$t = 2T \rightarrow c(t) = 1 - e^{-2} = 0.865$$

$$t = 3T \rightarrow c(t) = 1 - e^{-3} = 0.950$$

$$t = 4T \rightarrow c(t) = 1 - e^{-4} = 0.982$$

$$t = 5T \rightarrow c(t) = 1 - e^{-5} = 0.993$$

همان طوری که دیده می‌شود در $t = T$ مقدار پاسخ $c(t)$ 0.432 است یا پاسخ 43.2٪ کل تغییر خود را پشت سر گذاشته است. باید توجه کرد که هر چه قدر ثابت زمانی T کوچکتر باشد، پاسخ سیستم سریعتر است. مشخصه مهم دیگر پاسخ نهایی این است که شیب خط مماس در $t = 0$ برابر با $\frac{1}{T}$ است زیرا:

$$\left. \frac{dc}{dt} \right|_{t=0} = \frac{1}{T} e^{-t/T} \Big|_{t=0} = \frac{1}{T}$$

همچنین طبق نمودار رسم شده شیب منحنی پاسخ $c(t)$ به طور یکسان از

$$\frac{1}{T} \text{ در } t = 0 \text{ به مقدار } t = \infty \text{ می‌رسد.}$$

در $t \gg 4T$ پاسخ در فاصله‌ی دو در صدی مقدار نهایی اش قرار می‌گیرد.

از لحاظ ریاضی حالت ماندگار تنها در بی نهایت حاصل می‌شود ولی در عمل

فاصله‌ی زمانی لازم برای رسیدن پاسخ به دو در صدی مقدار نهایی اش

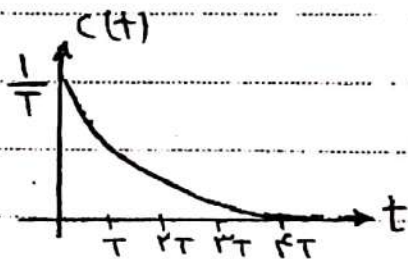
یا هم ثابت زمانی، تقریب معقولی از زمان پاسخ است.

۲. ورودی پله واحد: $R(s) = 1$

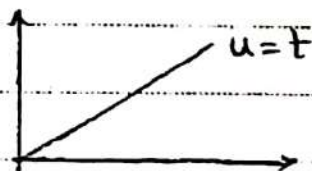
$$C(s) = \frac{1}{Ts+1} \cdot 1 = \frac{1/T}{s+(1/T)}$$

بالایس معکوس گرفتن داریم:

$$c(t) = \frac{1}{T} e^{-t/T}$$



۳. ورودی شیب واحد یا Ramp: $R(s) = \frac{1}{s^2}$ و $u(t) = t$



$$u(t) = t \Rightarrow R(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$\Rightarrow C(s) = \frac{1}{Ts+1} \cdot \frac{1}{s^2} = \frac{1}{s^2} - \frac{T}{s} + \frac{T^2}{Ts+1}$$

بالایس معکوس گرفتن داریم:

$$c(t) = t - T + Te^{-t/T}$$

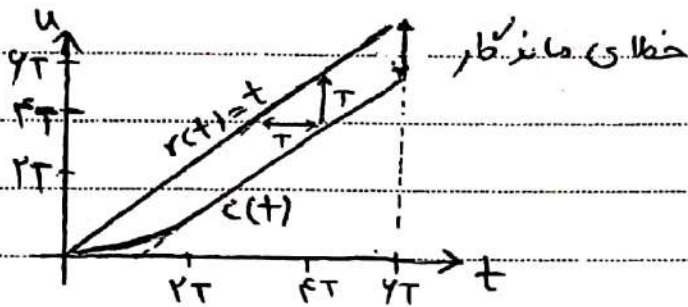
وسیلنال خطا برابر است با:

$$e(t) = r(t) - c(t) = t - (t - T + Te^{-t/T})$$

$$= T(1 - e^{-t/T})$$

با میل کردن $t \rightarrow \infty$ ، $e^{-t/T} \rightarrow 0$ میل می کند، پس وسیلنال خطای $e(t)$ به T میل می کند.

خطای رینال کردن ورودی شیب واحد در t بزرگ برابر T است. که هر چه قدر ثابت زمانی کوچکتر باشد، خطای ماندگار رینال کردن ورودی شیب کوچکتر است.



اگر ورودی سیستم، ورودی
Ramp باشد هیچ گاه تابع
سیستم، یک سیستم رسته‌ی
یا باشد.

توجه:
طبق نتیجه‌ای که از ورودی‌ها بدست می‌آید می‌توان نوشت:

به ازای ورودی شیب واحد خروجی $c(t)$ برابر است با:

$$c(t) = t - T + T e^{-t/T} \quad t \geq 0$$

به ازای ورودی پله واحد که مشتق ورودی شیب واحد است، خروجی $c(t)$ برابر
است با:

$$c(t) = 1 - e^{-t/T} \quad t \geq 0$$

و به ازای ورودی ضربه واحد که مشتق ورودی پله واحد است، خروجی $c(t)$ برابر
است با:

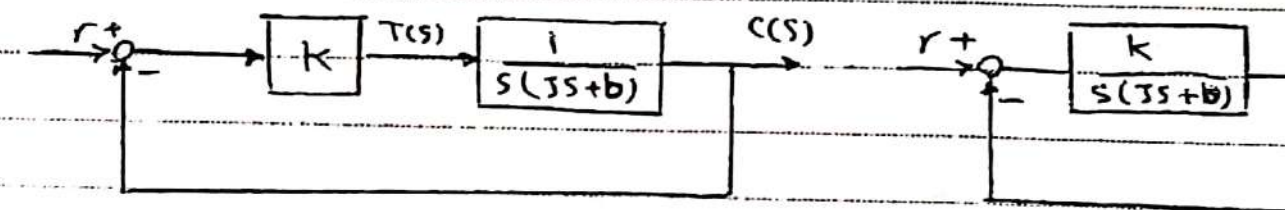
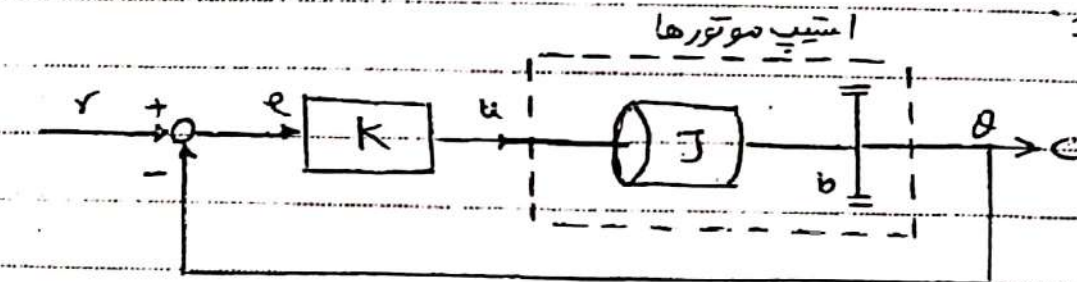
$$c(t) = \frac{1}{T} e^{-t/T} \quad t \geq 0$$

مطابق آنچه که گفته شد یک ویژگی سیستم‌های خطی مستقل از زمان که
سیستم‌های خطی متغیر با زمان و سیستم‌های غیر خطی آن را دارا نمی‌باشند
این است که پاسخ به مشتق یک سیگنال ورودی را می‌توان با مشتق‌گیری از
پاسخ سیستم به سیگنال اصلی بدست آورد. همچنین می‌توان دید که پاسخ به
انتگرال سیگنال ورودی را می‌توان با انتگرال‌گیری از پاسخ سیستم به
سیگنال اصلی و تعیین ثابت‌های انتگرال‌گیری از شرایط اولیه‌ی خروجی بدست
آورد.

(II) سیستم مرتبه‌ی دوم:

اکثر سیستم‌های صنعتی به گونه‌ای هستند که متغیر دارند به صورت یک سیستم رسته‌ی ۲ درآیند.

برای مثال یک سروو موتور Servomotor را به عنوان سیستم مرتبه‌ی دوم در نظر بگیرید.



معادله‌ی عناصر یا این سیستم برابر است با:

serve: $J\ddot{\theta} + b\dot{\theta} = T$

اگر از رابطه‌ی فوق لاپلاس بگیریم؛ داریم:

$$J(s^2\theta(s) - s\theta(0) - \dot{\theta}(0)) + b(s\theta(s) - \theta(0)) = \frac{T}{s}$$

$$\Rightarrow Js^2\theta + bs\theta = \frac{T}{s} \Rightarrow \frac{\theta}{T} = \frac{1}{Js^2 + bs} = \frac{1}{s(Js + b)}$$

با استفاده از رابطه‌ی تانسون تابع تبدیل حلقه بسته سیستم برابر است با:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\frac{k}{s(Js+b)}}{1 + \frac{k}{s(Js+b)}} = \frac{k}{Js^2 + bs + k}$$

برای اینکه رابطه به حالت استاندارد درآید آن را بر J تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{k/J}{s^2 + (b/J)s + (k/J)}$$

این سیستم حلقه بسته ۲ قطب دارد به همین خاطر سیستم مرتبه‌ی دوم است (برخی از سیستم‌های مرتبه‌ی دوم یک یا دو صفر هم دارند)

توهم:

طبق آنچه که از ارتعاشات بیار داریم:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$$

$$s = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4mk}}{2m}$$

$$b^2 - 4mk = \Delta \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta < 0 \quad \text{دورشی (مفصل مزدوج (زیر میرا))} \\ \Delta = 0 \quad \text{حالت میرای بحرانی} \\ \Delta > 0 \quad \text{دورشی حقیقی متمایز (فوق میرا)} \end{array} \right.$$

$$\Delta = 0 \rightarrow b = b_{\text{critical}} = b_c \quad \text{در میر}$$

$$b_c^2 = 4mk \Rightarrow b_c = 2\sqrt{mk} = 2m\sqrt{\frac{k}{m}} = 2m\omega_n$$

$$\zeta = \text{نسبت میرایی} = \frac{b}{b_c} \Rightarrow b = \zeta b_c = 2m\zeta\omega_n$$

$$\text{حال در فرض فوق داریم:} \quad \omega_n = \sqrt{\frac{k}{J}} \Rightarrow \omega_n^2 = \frac{k}{J} \quad \& \quad \frac{b}{J} = 2\zeta\omega_n$$

$$\Rightarrow \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

۱. ورودی پله‌ای واحد: $R(s) = \frac{1}{s}$

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \cdot \frac{1}{s}$$

اگر α به صورت زیر باشد داریم:

$$\alpha = s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2$$

$$= (s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2 \quad \omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$$

فرکانس طبیعی ω_n و ضرایب میرایی ζ

$$\Rightarrow C(s) = \frac{1}{s} - \frac{s + 2\zeta\omega_n}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$= \frac{1}{s} - \frac{s + \zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2} - \frac{\zeta\omega_n \times \frac{\omega_d}{\omega_n}}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2}$$

چنانچه از رابطه‌ی فوق لاپلاس معکوس بگیریم داریم:

$$c(t) = 1 - e^{-\zeta\omega_n t} \cos(\omega_d t) - e^{-\zeta\omega_n t} \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin(\omega_d t)$$

نویسه:

$$L^{-1} \left[\frac{b}{(s+a)^2 + b^2} \right] = e^{-at} \sin(bt)$$

$$L^{-1} \left[\frac{s+a}{(s+a)^2 + b^2} \right] = e^{-at} \cos(bt)$$

$$\Rightarrow c(t) = 1 - e^{-\zeta\omega_n t} \left(\cos \omega_d t + \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin \omega_d t \right)$$

سیگنال خطای این سیستم که تفاضل ورودی و خروجی است برابر است با:

$$e(t) = r(t) - c(t) = e^{-\zeta\omega_n t} \left(\cos \omega_d t + \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin \omega_d t \right)$$

که این سیگنال خطا، نوسانات سینوسی میرا دارد. در حالت ماندگار یا $t \rightarrow \infty$

بین ورودی و خروجی خفای وجود ندارد.

میررسی حالات مختلف:

① حالت نامیرایی $\zeta = 0$:

براین حالت پاسخ نامیرایی شود و نوسانات تابی نهایت ادامه دارد.

$$c(t) = 1 - e^0 (\cos \omega_n \sqrt{1-0} t + 0) \\ = 1 - \cos \omega_n t$$

که این رابطه نشان می دهد که ω_n فرکانس طبیعی نامیرایی سیستم است.

اگر سیستم مقدار کمی هم میرایی داشته باشد دیگر پاسخ فرکانس طبیعی میرایی ظاهر نمی شود بلکه فرکانس طبیعی میرا $\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2}$ ظاهر می شود که هر چه قدر ζ بزرگتر باشد فرکانس طبیعی میرایی کوچکتر می شود و به ازای $\zeta = 1$ پاسخ سیستم به حالت فرامیرایی آید و دیگر نوسان نمی کند.

② حالت میرایی بحرانی $\zeta = 1$:

$$c(t) = 1 - e^{-\omega_n t} \left(\cos 0 + \lim_{\zeta \rightarrow 1} \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t) \right)$$

که می دانیم:

$$\lim_{\zeta \rightarrow 1} \frac{\zeta \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t)}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \lim_{\zeta \rightarrow 1} \frac{\zeta \omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \lim_{\zeta \rightarrow 1} \zeta \omega_n t = \omega_n t$$

$$\Rightarrow c(t) = 1 - e^{-\omega_n t} (1 + \omega_n t)$$

③ حالت فرامیرا $\zeta > 1$:

$$c(s) = \frac{\omega_n^2}{(s + \zeta \omega_n + \omega_n \sqrt{1-\zeta^2})(s + \zeta \omega_n - \omega_n \sqrt{1-\zeta^2})s}$$

با عکس تبدیل لاپلاس فوق داریم:

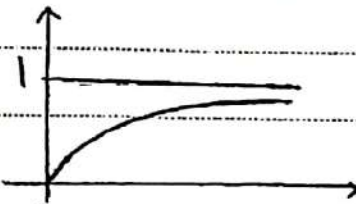
$$c(t) = 1 + \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \left(\frac{e^{-s_1 t}}{s_1} + \frac{e^{-s_2 t}}{s_2} \right)$$

که در آن داریم:

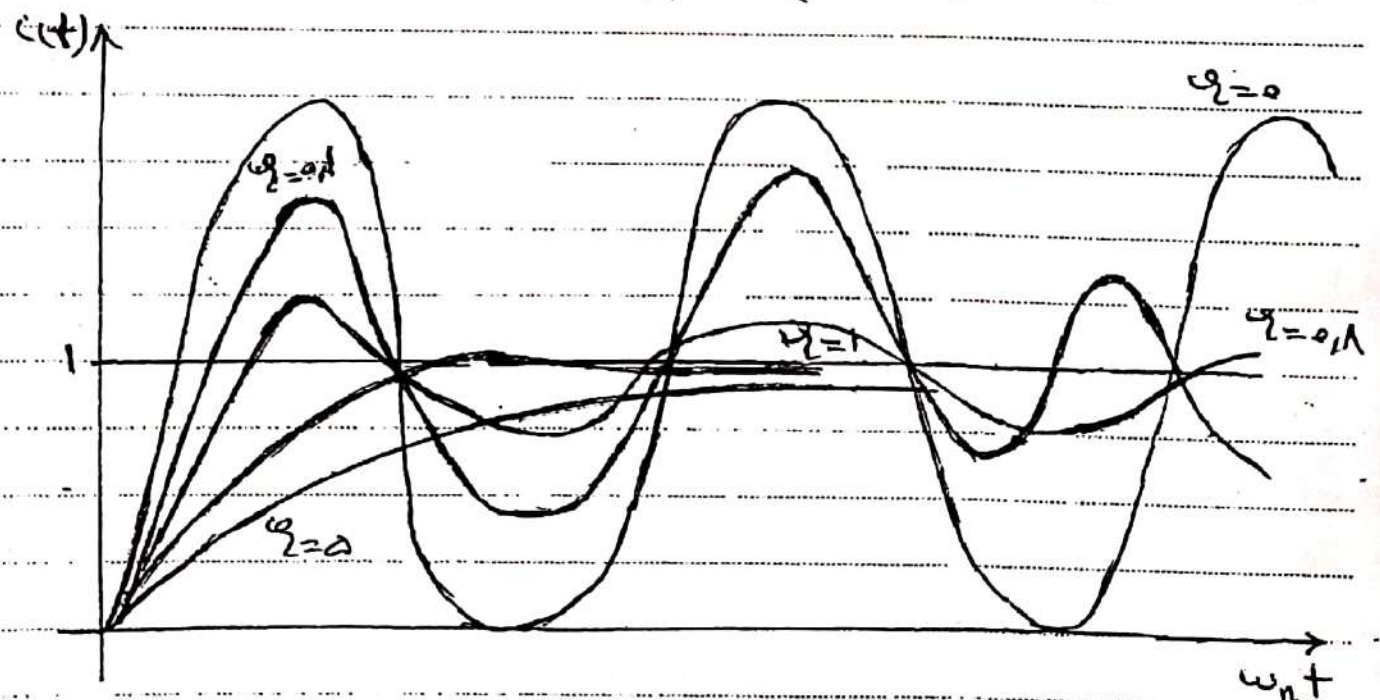
$$s_1 = (-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}) \omega_n \quad \& \quad s_2 = (-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}) \omega_n$$

$$e^{-s_1 t} = e^{(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}) \omega_n t}$$

$$e^{-s_2 t} = e^{(-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}) \omega_n t}$$



وقتی که ζ خیلی خیلی بزرگتر از 1 باشد، یکی از دو جمله‌ی نمایی بسیار سریعتر از دیگری میرایی شود. به نحوی که می‌توان از نمایی دارای میرایی سریعتر (متناظر با ثابت زمانی کوچکتر) چشم‌پوشی کرد.

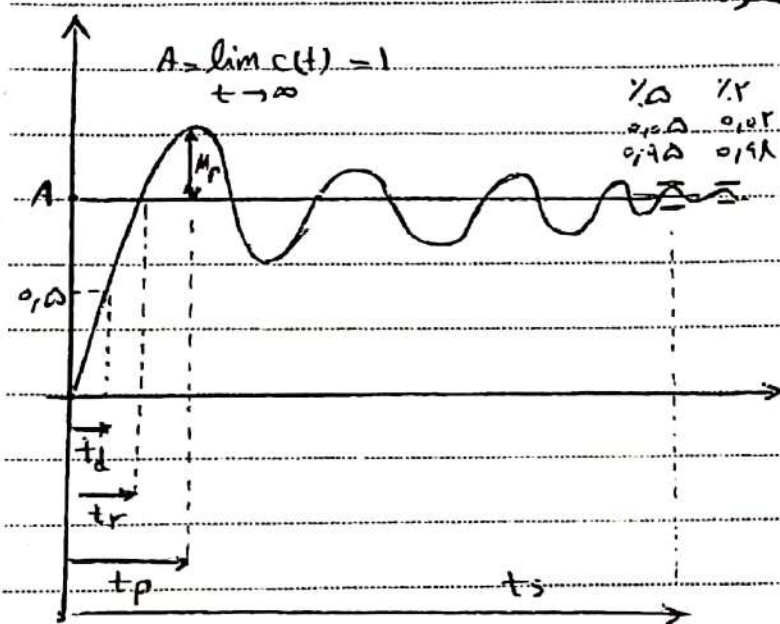


مشخصات پاسخ گذرا : Performance

غالباً مشخصات عملکرد سیستم‌های کنترلی بر حسب پاسخ گذرا به ورودی پله واحد بیان می‌شود. چون این ورودی را به سادگی می‌توان ساخت و برای اثرگذاری شدید کافی است. (اگر پاسخ به ورودی پله واحد معلوم باشد، از لحاظ ریاضی

می توان پاسخ به هر ورودی دیگر را با مشتق یا انتگرالگیری (همان طور که قبلاً گفته شد) محاسبه نمود.

پاسخ گذرای سیستم های کنترلی عملاً قبل از رسیدن به حالت ماندگار نوسان صیرا دارند. در تعیین مشخصات پاسخ گذرای یک سیستم کنترل به ورودی پله ای باید موارد زیر مشخص باشد.



۱. زمان تأخیر t_d
۲. زمان صعود t_r
۳. زمان اوج t_p
۴. ماکزیمم فراجهش M_p
۵. زمان نشست t_s

۱. زمان تأخیر: مدت زمانی است که طول می کشد تا پاسخ برای اولین بار به نصف مقدار اولیه اش برسد.

۲. زمان صعود: مدت زمانی است که طول می کشد تا جواب برای اولین بار به مقدار نهایی اش برسد. به عبارت دیگر زمان صعود زمانی است که طول می کشد تا پاسخ از ۰.۵ به ۰.۹ یا از ۰.۵ به ۰.۹۵ یا از ۰.۵ به ۰.۹۹۵ مقدار نهایی اش می رسد. برای سیستم های مرتبه ی دوم فروهر معمولاً زمان صعود از ۰.۵ تا ۰.۹۵ و برای سیستم های فرامیر معمولاً زمان صعود از ۰.۱۵ به ۰.۹۵ به کار می رود.

۳. زمان اوج t_p :

زمان لازم برای رسیدن پاسخ به اولین فرا جهش است.

۴. حداکثر فرا جهش M_p :

حداکثریم فرا جهش مقدار اوج فرا جهش است که نسبت به مقدار یک اندازه گیری می شود. در مواردی که مقدار حالت ماندگار پاسخ یک نیست، معمولاً درصد فرا جهش به کار می رود که این مقدار به صورت نسبت افتلاف ماکسیمم مقدار از مقدار نهایی تقسیم بر مقدار نهایی است یعنی:

$$M_p = \frac{C(t_p) - C(\infty)}{C(\infty)} \times 100$$

توجه:

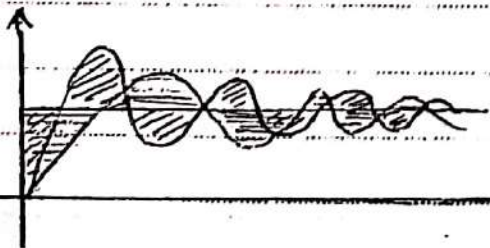
اندازه ماکسیمم فرا جهش (بر حسب درصد) مستقیماً پایداری سیستم را نشان می دهد.

۵. زمان نشست t_s :

مدت زمانی است که طول می کشد تا پاسخ به محدوده ای مشخص و همین حول مقدار نهایی اش برسد. که این گستره معمولاً بر حسب درصد مطلق از مقدار نهایی (معمولاً ۲ تا ۵ درصد) بیان می شود. زمان نشست با بیشترین ثابت زمانی سیستم کنترل مرتبط است.

توجه:

در سیستم های مکانیکی برای طراحی سیستم ها باید توجه داشت که مسافت ها شورش زده در شکل زیر مقدار کمتری باشند. تا مقدار غیر استفاده از مکانیزم ها کاهش یابد. به همین منظور باید با توجه به پارامترهای بیان شده در بالا سعی شود تا این مسافت های شورش زده کمتر گردند و این معیار طراحی این سیستم ها می باشد.



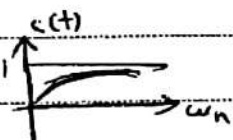
توجه:

به جز کاربردهای خاصی که در آنجا نوسان قابل تحمل نیستند، سریع بودن پاسخ گذرا و داشتن میرایی کافی امری مطلوب است. برای اینتر سیستم مرتبه‌ی دوم پاسخ گذرای مطلوبی داشته باشد نسبت میرایی باید بین ۰٫۴ تا ۰٫۸ باشد. مقادیر کوچکتر از ۰٫۴ با فزاینده‌ی زیاده‌پاسخ گذرا همراه است و سیستم با فزاینده‌ی کمتر از ۰٫۸ سیستمی کند است.

نکته:

فزاینده‌ی ماکزیمم و زمان صعود برخلاف یکدیگر عمل می‌کنند یعنی در طراحی سیستم‌های کنترلی هر دو تا می‌توانیم می‌توان کم کرد. یعنی اگر یکی از این دو کم شود دیگری زیاد می‌شود و بالعکس.

سیستم‌های مرتبه‌ی دوم و مشخصات پاسخ گذرا:
این مشخصات برای سیستم‌های رسته‌ی ۲ فرو میرا تقریبی می‌گردند زیرا برای سایر سیستم‌ها مثلاً سیستم‌های فرو میرا شکل نمودار پاسخ به صورت زیر می‌باشد.

۱. زمان صعود t_r :زمان صعود به ازای $c(t) = 1$ بدست می‌آید:

$$c(t) = 1 - e^{-\zeta \omega_n t} \left(\cos \omega_d t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \omega_d t \right) = 1$$

$$e^{-\zeta \omega_n t} \left(\cos \omega_d t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \omega_d t \right) = 0$$

چون $e^{-\zeta \omega_n t} \neq 0$ است پس:

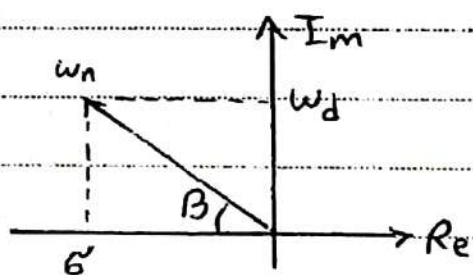
$$\tan \omega_d t_r = \frac{-\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$$

$$\Rightarrow t_r = \frac{1}{\omega_d} \tan^{-1} \left(-\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} \times \frac{\omega_n}{\omega_d} \right)$$

با تقریف کسیت های زیر داریم:

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2}$$

$$\sigma = \omega_n \zeta$$



$$t_r = \frac{1}{\omega_d} \tan^{-1} \left(\frac{\omega_d}{-\sigma} \right)$$

$$\Rightarrow t_r = \frac{\pi - \beta}{\omega_d}$$

۲. زمان اوج t_p :

زمان اوج را می توان با مشتق گیری از $c(t)$ و مساوی صفر قرار دادن آن بدست آورد.

$$\frac{dc}{dt} = \zeta \omega_n e^{-\zeta \omega_n t} \left(\cos \omega_d t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \omega_d t \right)$$

$$+ e^{-\zeta \omega_n t} \left(\omega_d \sin \omega_d t - \frac{\zeta \omega_d}{\sqrt{1-\zeta^2}} \cos \omega_d t \right)$$

$$\frac{dc}{dt} = e^{-\zeta \omega_n t} \left(\zeta \omega_n \cos \omega_d t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \omega_d t - \omega_n \sqrt{1-\zeta^2} \sin \omega_d t - \zeta \omega_n \cos \omega_d t \right)$$

$$\sin \omega_d t - \zeta \omega_n \cos \omega_d t = e^{-\zeta \omega_n t} \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \omega_d t_p = 0$$

از آنجایی که ω_n و $e^{-\zeta \omega_n t}$ نمی تواند صفر باشند:

$$\sin \omega_d t_p = 0 \Rightarrow \omega_d t_p = 0, \pi, 2\pi, \dots = k\pi$$

$$(k=0, 1, 2, \dots)$$

چون زمان اوج با اولین فراجهش متناظر است مقادیر k را از کمترین

مقدار مورد بررسی قرار می دهیم:

$$\omega_d t_p = k\pi \Rightarrow t_p = \frac{k\pi}{\omega_d}$$

$$k=0 \rightarrow t_p=0 \quad \times$$

$$k=1 \rightarrow t_p = \frac{\pi}{\omega_d} \quad \checkmark$$

زمان اوج

$$\Rightarrow t_p = \frac{\pi}{\omega_d}$$

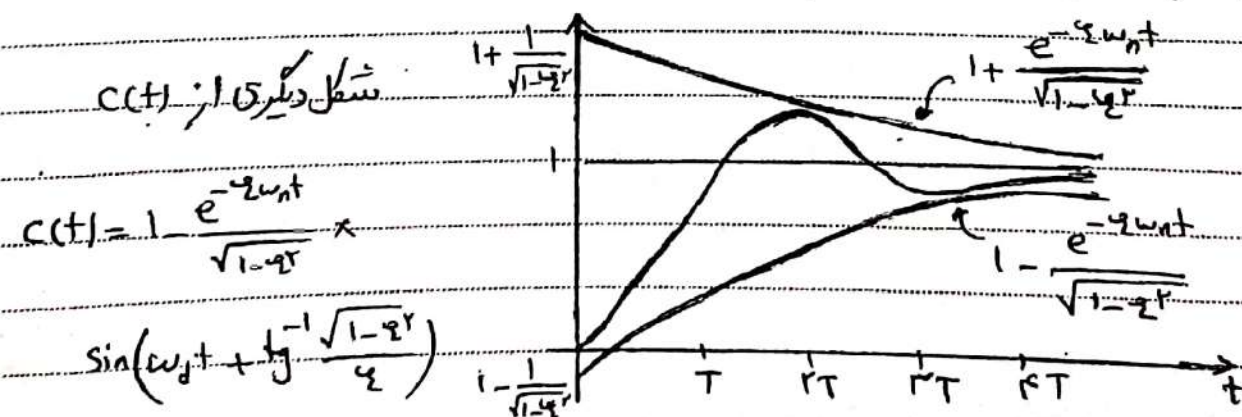
۳. ماکزیمم فراجهش M_p :با جای گذاری t_p در $c(t)$ بدست می آید:

$$c(t) \Big|_{t=t_p = \frac{\pi}{\omega_d}} = 1 - e^{-\zeta \omega_n \left(\frac{\pi}{\omega_d} \right)} \left(\cos \pi + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \pi \right)$$

$$= 1 + e^{-\zeta \omega_n \left(\frac{\pi}{\omega_d} \right)}$$

$$M_p = \frac{c(t_p) - c(\infty)}{c(\infty)} \times 100 = \frac{1 + e^{-\zeta \omega_n \left(\frac{\pi}{\omega_d} \right)} - 1}{1} \times 100$$

$$\Rightarrow M_p = e^{-\zeta \omega_n \left(\frac{\pi}{\omega_d} \right)} = e^{-\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \pi}$$

۴. زمان نشست t_s :با توجه به فرمول $c(t)$ داریم:

Sina SD619

در منحنی رسم شده روپوش وجود دارد که ثابت زمانی این پوش ها $T = \frac{1}{\zeta \omega_n}$ است.

سرعت میرایی پاسخ ندر را به اندازه ی ثابت زمانی $T = \frac{1}{\zeta \omega_n}$ بستگی دارد و زمان نشست مناظر با $\pm 2\%$ یا $\pm 5\%$ در منحنی رسم شده در صفحی قبل همچنین صفحی ۱۲۰ بر حسب همین ثابت زمانی T تعریف می گردد.

اگر پاسخ سیستم های بسته ی ۱ را نگاه کنیم متوجه می شویم که ۴ برابر مدت ثابت زمانی طول می کشد تا پاسخ به مقدار نهایی اش برسد. و این سیستم ها تنها بر اساس همین ثابت زمانی طراحی می گردند زیرا تنها ۱ پارامتر و ۱ معیار دارند اما سیستم های مرتبه ی دوم دارای ۵ پارامتر و ۲ معیار به صورت زیر می باشد:

$$t_s = \frac{3}{\zeta} = \frac{3}{\zeta \omega_n} = 3T \quad 5\% \text{ زمان نشست}$$

$$t_s = \frac{4}{\zeta} = \frac{4}{\zeta \omega_n} = 4T \quad 2\% \text{ زمان نشست}$$

مثال) اگر $\zeta = 0.4$ ، $\omega_n = 5 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ باشد مطلوبست محاسبه ی t_p ، t_r ، M_p ، t_s .

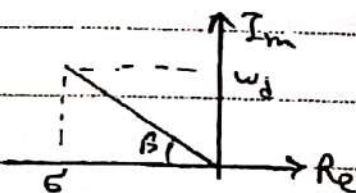
$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} = 5 \sqrt{1 - (0.4)^2} = 4$$

$$\zeta = \zeta \omega_n = 0.4 \times 5 = 2$$

زمان ظهور t_r

$$t_r = \frac{\pi - \beta}{\omega_d} = \frac{\pi - 0.93}{4} = 0.55$$

$$\beta = \tan^{-1} \left(\frac{\omega_d}{\zeta} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{4}{2} \right) = 0.93 \text{ rad}$$



زمان اوج t_p :

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\kappa} = 0,185 \text{ sec}$$

ماکزیمم فراجهش :

$$M_p = e^{-\left(\frac{\zeta}{\omega_d}\right)\pi} = e^{-\left(\frac{\kappa}{\kappa}\right)\pi} = 0,095$$

or

$$\Rightarrow M_p = 9,5\%$$

$$M_p = e^{-\left(\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)\pi} = e^{-\left(\frac{\kappa}{\kappa}\right)\pi} = 0,095$$

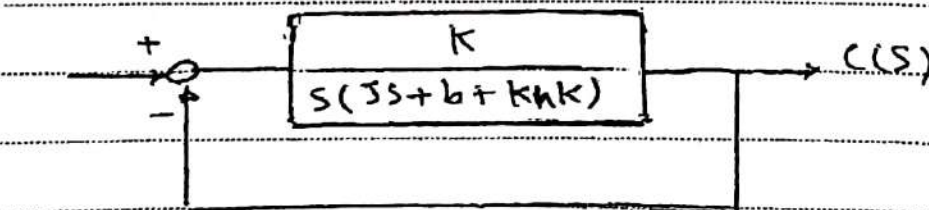
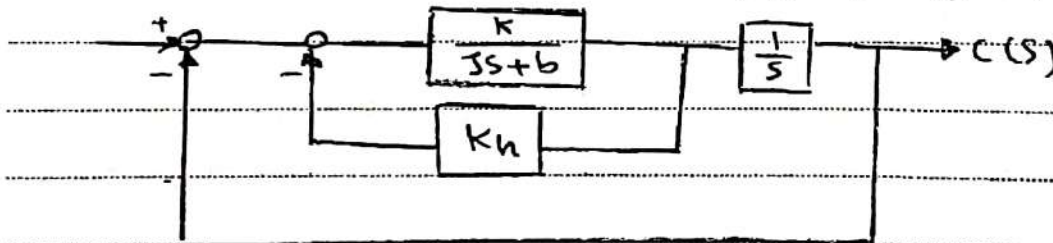
زمان نشست t_s :

$$2\% \text{ معیار} \Rightarrow t_s = \frac{\kappa}{\zeta} = \frac{\kappa}{\kappa} = 1,33 \text{ sec}$$

$$5\% \text{ معیار} \Rightarrow t_s = \frac{\kappa}{\zeta} = \frac{\kappa}{\kappa} = 1 \text{ sec}$$

سیستم سرووپا فیدبک سرعت :

همان طوری که قبلاً در مورد سیستم های سرووپا صحبت کردیم، چنین سیستم هایی با فیدبک سرعت به صورت زیر می باشند.



$$\zeta = \frac{b + K_h K}{2\sqrt{KJ}}$$

فیدبک سرعت بفرکانس طبیعی $\omega_n = \sqrt{\frac{K}{J}}$ اثری ندارد. با توجه به اینکه ماکزیمم فراجهش به ازای ورودی پله ای رای توان با نسبت میرایی ها کنترل کرد می توان آن را با تنظیم ثابت فیدبک سرعت K_h و برای رستایی به $0,1 < \zeta < 0,4$ محدود کرد.

مثال) برای سیستم سروو با فیدبک سرعت و مقادیر بهره‌ی k ، ثابت فیدبک سرعت k_h ، رطوری بیابید که M_p به ازای ورودی پله واحد ۰٫۲ و t_p برابر با ۱ sec شود. سپس با توجه به k ، k_h بدست آمده t_s ، t_r را بیابید.
 $J = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ $b = 1 \text{ N} \cdot \text{m} / \text{rad/s}$

$$M_p = e^{-\left(\frac{\eta}{\sqrt{1-\eta^2}}\right)\pi} = 0.2$$

$$\Rightarrow \frac{\eta}{\sqrt{1-\eta^2}} \pi = -\ln 0.2 = 1.41$$

که اگر طرفین را به توان ۲ برسانیم و معادله‌ی درجه‌ی دوم بر حسب η را حل کنیم در نهایت پاسخ قابل قبول ما برابر است با:

$$\eta = 0.456$$

از طرف دیگر می‌دانیم:

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = 1 \Rightarrow \omega_d = \pi$$

$$\Rightarrow \omega_d = \omega_n \sqrt{1-\eta^2} \Rightarrow \omega_n = \frac{\omega_d}{\sqrt{1-\eta^2}} = \frac{\pi}{\sqrt{1-(0.456)^2}}$$

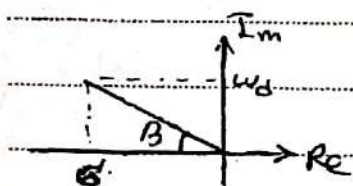
$$\Rightarrow \sqrt{\frac{k}{J}} = 3.53 \Rightarrow k = (3.53)^2 J = 12.5 \times 1 = 12.5 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

در سیستم سروو با فیدبک سرعت داریم:

$$\eta = \frac{b + k k_h}{2\sqrt{kJ}}$$

$$\Rightarrow k_h = \frac{2\sqrt{kJ}\eta - b}{k} = \frac{2\sqrt{12.5 \times 1} \times 0.456 - 1}{12.5} = 0.178 \text{ sec}$$

زمان صعود t_r ، زمان نشست برابر است با:



$$B = \tan^{-1}\left(\frac{\omega_d}{\sigma}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-\eta^2}}{\eta}\right) = \tan^{-1} 1.95 = 1.1 \text{ rad}$$

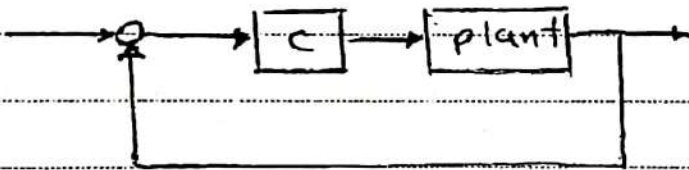
$$t_r = \frac{\pi - \beta}{\omega_d} = \frac{\pi - 1.1}{\pi} = 0.255$$

زمان نشست

معیار ۲ (۲٪) : $t_s = \frac{4}{\zeta \omega_n} = \frac{4}{0.454 \times 3.53} = 2.48 \text{ sec}$

معیار ۵ (۵٪) : $t_s = \frac{3}{\zeta \omega_n} = \frac{3}{0.454 \times 3.53} = 1.86 \text{ sec}$

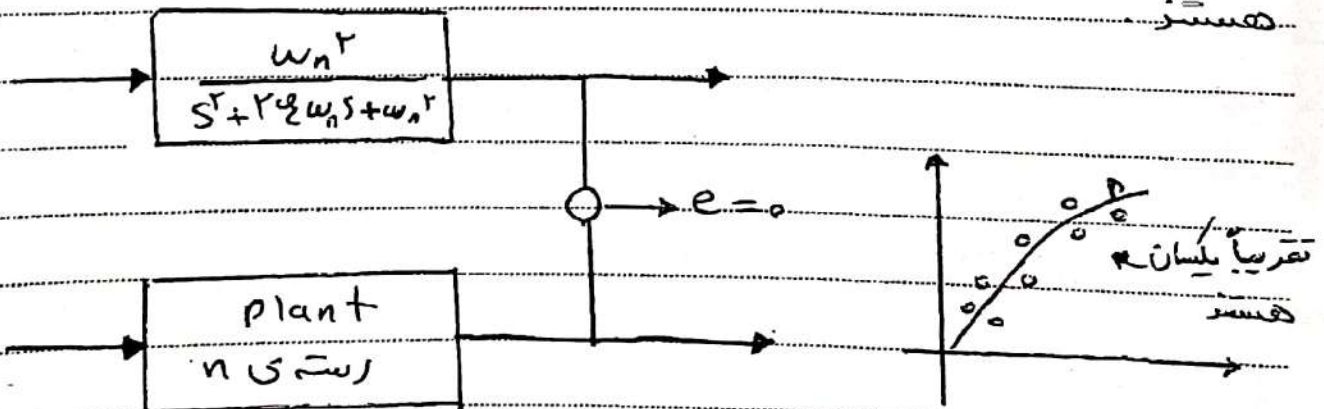
توجه: در مسائل حقیقی و در طراحی سیستم‌های کنترلی، هدف محاسبه ω_n و ζ می‌باشد یعنی باید تمامی مراعاتی که تا الان در مورد آنها صحبت کردیم را عکس بنود تا بتوان ω_n و ζ را محاسبه کرد. زیرا تابع تبدیل یک سیستم شامل کنترلر و سیستم اصلی (در حلقه‌ی بسته) می‌باشد.



$$C(s) = \frac{c_p}{1 + c_p}$$

قضیه‌ی قطب‌های غالب:

اگر به دو سیستم یا هر رسته‌ای (رسته‌ی دو سیستم متفاوت است) ورودی دهیم به طوری که خروجی دو سیستم با هم برابر شوند این دو سیستم یکی هستند.



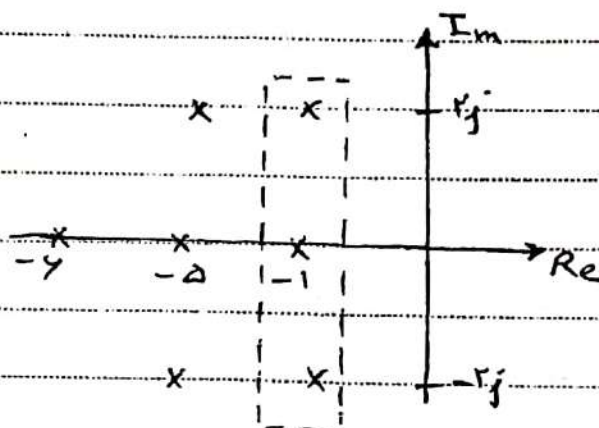
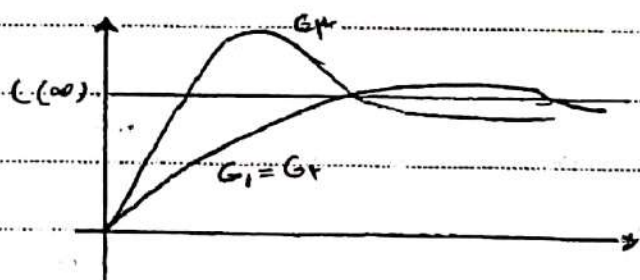
البته این موضوع دلیل فیزیکی و ریاضی هم دارد برای مثال تابع زیر دارای

قطب‌هایی به صورت زیر می‌باشند

$$G_1: s = -1, s = -5, s = -6$$

$$G_2: s = -1, s = -5 \pm 2j$$

$$G_3: s = -1 \pm 2j, s = -5$$



طبق قضیه قطب‌های غالب در یک سیستم فقط قطب‌هایی ظاهر خواهند شد که به محور Im نزدیک‌ترند سایر قطب‌ها به سرعت مغفول می‌شوند.

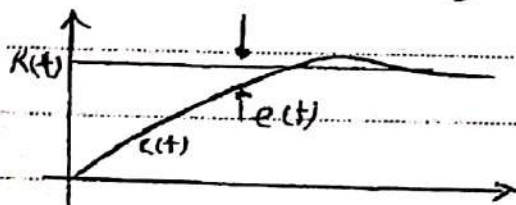
$$G_1: s = -1, s \times -5, s \times -6$$

$$G_2: s = -1, s = \times -5 \pm 2j$$

$$G_3: s = -1 \pm 2j, s \times -5$$

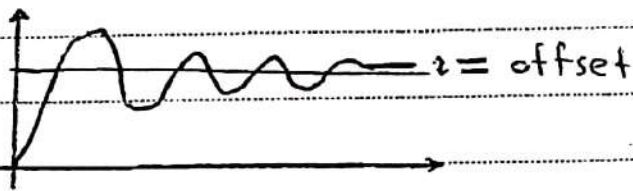
خطای حالت ماندگار در سیستم‌های کنترلی دارای فیدبک واحد:

معمولاً نکته‌ای که در طراحی سیستم‌های کنترلی مورد توجه قرار می‌گیرد مقدار $R(t)$ است که در آن پاسخ به مقدار نهایی اش نزدیک می‌شود.



$$e(t) = R(t) - c(t)$$

از آنجایی که همواره مقداری offset در سیستم وجود دارد باید مقدار این خطاها را به قدری کاهش داد تا این offset از بین برود و بتوانیم به پاسخ صحیح سیستم دست یابیم.



طبق قضیه مقدار نهایی:

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s E(s) = 0$$

steady state

هر سیستم کنترل فیزیکی در پاسخ به ورودی خاصی ذاتاً خطای حالت ماندگار دارد. ممکن است سیستمی به ازای ورودی پله‌ای واحد خطای حالت ماندگار نداشته باشد ولی به ازای ورودی شیب (Ramp) خطای حالت ماندگار داشته باشد. بنابراین حذف این خطا تغییر ساختار سیستم است. این که سیستمی به ازای یک ورودی خاص خطای حالت ماندگار نداشته باشد به نوع تابع تبدیل حلقه باز سیستم بستگی دارد.

حال سیستمی با فیدبک واحد را در نظر بگیرید که تابع تبدیل حلقه باز آن $G(s)$ است:

$$G(s) = \frac{k (T_a s + 1)(T_b s + 1) \dots (T_m s + 1)}{s^N (T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \dots (T_p s + 1)}$$

و یا:

$$G(s) = \frac{k \prod (1 + T_{jz} s) \prod [1 + \eta_j (T_{jz} s) + (T_{jz} s)^2]}{s^N \prod (1 + T_{i s}) \prod [1 + \eta_i (T_{i s}) + (T_{i s})^2]}$$

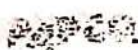
در مخرج این توابع تبدیل s^N وجود دارد که نشان دهنده وجود یک قطب هر تبه‌ای N در مبدأ است. دسته بندی سیستم بر اساس مقدار N که توان s است صورت می‌گیرد.

$N=0$: سیستم نوع صفر

$N=1$: سیستم نوع یک

$N=2$: سیستم نوع دو

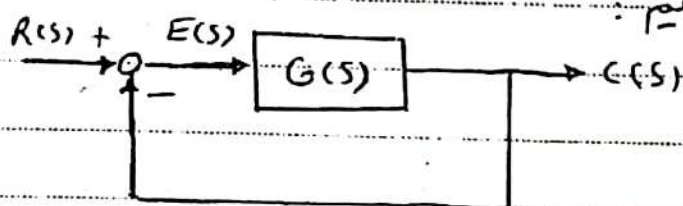
$\vdots$



در جلوتر خواهیم دید که اگر $G(s)$ را به تقوی بنویسیم که با میل s به صفر تمام جهات صورت و مخرج تابع تبدیل حلقه باز $G(s)$ به جز s^N به یک میل کند بهره‌ی حلقه‌ی K با خطای حالت ماندگار نسبت مستقیم دارد.

خطای حالت ماندگار:

اگر تابع تبدیل $G(s)$ را در داخل یک حلقه‌ی بسته قرار دهیم و بخواهیم پاسخ حالت ماندگار سیستم را بیابیم، داریم:



تابع تبدیل حلقه‌ی بسته:
$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)}$$

تابع تبدیل بین سیگنال خطا و سیگنال ورودی $r(t)$:
$$\frac{E(s)}{R(s)} = 1 - \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{1+G(s)}$$

قضیه‌ی مقدار نهایی راه مناسبی برای یافتن عملکرد حالت ماندگار سیستم‌های پایدار است:

$$E(s) = \frac{R(s)}{1+G(s)}$$

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s E(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s R(s)}{1+G(s)}$$

ثابت خطای ایستایی که در زیر معرفی می‌کنیم از معیارهای سنجش سیستم‌های کنترل هستند؛ هر چه مقدار این ثابت‌ها بزرگتر باشند، خطای حالت ماندگار کوچکتر است.

* به ازای ورودی پایه‌ی واحد $u(s) = \frac{r_0}{s}$ داریم:

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s E(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \times \frac{1}{1+G(s)} \times \frac{r_0}{s} = \frac{r_0}{1+G(0)}$$

که به K_p ثابت خطای ایستای موقعتی گویند و به صورت زیر تعریف می شود:

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = G(0)$$

بنابراین خطای حالت ماندگار بر حسب ثابت خطای ایستای موقعتی K_p برابر است با:

$$e_{ss} = \frac{1}{1 + K_p}$$

سیستم نوع ۰: $K_p = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{k(T_a s + 1)(T_b s + 1) \dots}{(T_1 s + 1)(T_r s + 1) \dots} = k$

سیستم نوع ۱ و بالاتر: $K_p = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{k(T_a s + 1)(T_b s + 1) \dots}{s^N (T_1 s + 1)(T_r s + 1) \dots} = \infty$

بنابراین خطای حالت ماندگار برابر است با:

«سیستم نوع صفر»
 $K_p = k \Rightarrow e_{ss} = \frac{1}{1 + k}$

«سیستم نوع یک و بالاتر»
 $K_p = \infty \Rightarrow e_{ss} = 0$

نکته:

برای تبدیل سیستم نوع صفر به سیستم نوع یک از انتگرالگیر و برای حالت
 بعکس از مشتق گیر استفاده می کنیم

تابع تبدیل نوع یک = $\frac{1}{s} \times$ تابع تبدیل نوع صفر

تابع تبدیل نوع صفر = $s \times$ تابع تبدیل نوع یک

این تحلیل نشان می دهد که پاسخ یک سیستم کنترل ضربه به ورودی پله واحد
 خطای حالت ماندگار دارد مگر اینکه در مسیر پیش خور آن انتگرال گیری
 وجود داشته باشد. البته اگر بتوان به ازای ورودی پله ای، خطای کوچک را

Report

Sina SD619

تحمل کرد، استفاده از سیستم نوع صفر مجاز است به شرط اینکه بهره‌ی K به حد کافی بزرگ باشد، ولی اگر بهره‌ی K خیلی بزرگ باشد (سیاهی به پایداری نسبی مورد قبول مشکلی می‌شود، اگر بخواهیم خطای حالت ماندگار به ازای ورودی پله‌ی واحد صفر باشد سیستم باید نوع ۱ و یا بالاتر باشد.

* به ازای ورودی شیب واحد (Ramp) داریم:

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{1+G(s)} \times \frac{r_0}{s^2} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{r_0}{s+G(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{r_0}{sG(s)}$$

که به K_v ثابت خطای ایستای سرعت گویند و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s)$$

پس خطای حالت ماندگار بر حسب خطای ایستای سرعت برابر است با:

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v}$$

$$\text{سیستم نوع صفر: } K_v = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sK(T_a s + 1)(T_b s + 1) \dots}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \dots} = 0$$

$$\text{سیستم نوع یک: } K_v = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K(T_a s + 1)(T_b s + 1) \dots}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \dots} = K$$

$$\text{سیستم نوع دو و بالاتر: } K_v = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K(T_a s + 1)(T_b s + 1) \dots}{s^{N-1}(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \dots} = \infty \quad N \geq 2$$

بنابراین خطای حالت ماندگار برابر است با:

$$K_v = 0 \Rightarrow e_{ss} = \frac{1}{K_v} = \infty$$

«سیستم نوع صفر»

$$K_v = K \Rightarrow e_{ss} = \frac{1}{K_v} = \frac{1}{K}$$

«سیستم نوع یک»

«سیستم نوع دوم با لا تر» $\Rightarrow e_{ss} = \frac{1}{k_v} = 0$ $k_v = \infty$

تحلیل بالا نشان می دهد که سیستم نوع صفر می تواند در حالت ماندگار ورودی شیب را دنبال کند. سیستم نوع ۱ دارای فیدبک واحد می تواند ورودی شیب را با خطای محدود دنبال کند. در حالت ماندگار سرعت ورودی و خروجی یکسان است ولی در موقعیت خطا وجود دارد. این خطا با سرعت ورودی متناسب و با بهره ی k نسبت عکس دارد. سیستم نوع ۲ یا بالاتر می تواند ورودی شیب را در حالت ماندگار بدون خطا دنبال کند.

* به ازای ورودی سهمی (ورودی شتاب داریم):

$$r(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} t^2 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{1+G(s)} \cdot \frac{r_0}{s^2} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s^2 G(s)}$$

که به k_a ثابت خطای ایستای شتاب گویند و به صورت زیر تعریف می شود:

$$k_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s)$$

پس خطای حالت ماندگار بر حسب ثابت خطای ایستای k_a برابر است با:

$$e_{ss} = \frac{1}{k_a}$$

سیستم نوع صفر: $k_a = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2 K (T_a s + 1)(T_b s + 1) \dots}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \dots} = 0$

سیستم نوع یک: $k_a = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2 K (T_a s + 1)(T_b s + 1) \dots}{s (T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \dots} = 0$

سیستم نوع دو: $k_a = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2 K (T_a s + 1)(T_b s + 1) \dots}{s^2 (T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \dots} = K$

Page 134

Sina SD619

سیستم نوع ۳ و بالاتر: $K_p = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2 K (T_a s + 1)(T_b s + 1) \dots}{s^N (T_1 s + 1)(T_r s + 1) \dots} = \infty \quad N \geq 2$

بنابراین خطای حالت ماندگار برابر است با:

«سیستم نوع ۰، ۱» $K_a = 0 \Rightarrow e_{ss} = \frac{1}{K_a} = \infty$

«سیستم نوع ۲» $K_a = K \Rightarrow e_{ss} = \frac{1}{K_a} = \frac{1}{K}$

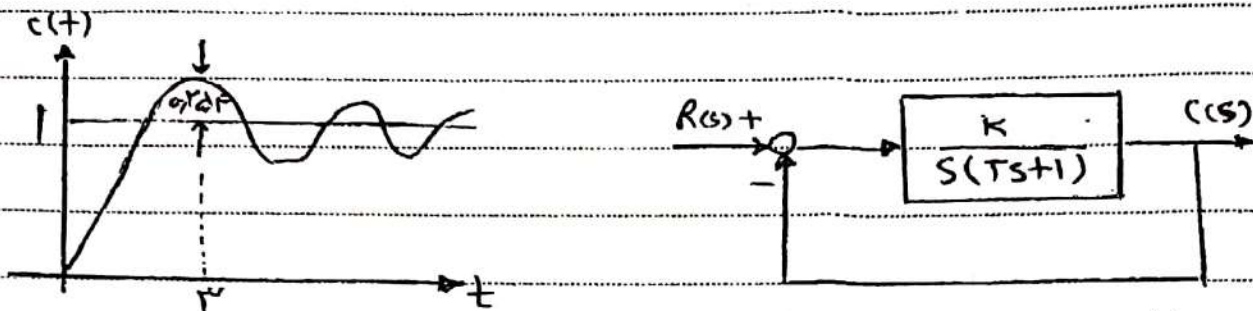
«سیستم نوع ۳ و بالاتر» $K_a = \infty \Rightarrow e_{ss} = \frac{1}{K_a} = 0$

تحلیل بالا نشان می دهد که سیستم های نوع ۰ و ۱ نمی توانند در حالت ماندگار ورودی سهمی را دنبال کنند. سیستم نوع ۲ با فیدبک واحد می تواند ورودی سهمی را با خطای محدود دنبال کند. سیستم نوع ۳ و بالاتر دارای فیدبک واحد، ورودی سهمی را در حالت ماندگار بدون خطا دنبال می کنند.

نوع سیستم	ورودی پله واحد $\frac{r_0}{s}$	ورودی شیب ۱ $\frac{r_0}{s^2}$ Ramp	ورودی سهمی $\frac{r_0}{s^3}$
نوع ۰	$\frac{r_0}{1+K}$	∞	∞
نوع ۱	۰	$\frac{r_0}{K}$	∞
نوع ۲	۰	۰	$\frac{r_0}{K}$

دیدیم که برای بهبود عملکرد حالت ماندگار می توان با افزودن انگرال گیر در مسیر پیشخور، نوع سیستم را بالا برد ولی اینکار مشکل پایداری را تشدید می کند. بنابراین برای رفع مشکل به جای انگرال گیر $(\frac{1}{s})$ بهتر است از مشتق گیر (s) استفاده شود.

مثال) در سیستم شکل زیر به ازای ورودی پله واحد مقادیر k , T , ζ و ω_n بیابید.



از روی شکل داریم:

$$M_p = 0.25 = e^{-\left(\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \pi\right)}$$

$$\Rightarrow \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \pi = -\ln 0.25 \Rightarrow \begin{cases} \zeta = -0.4 \times \\ \zeta = 0.4 \checkmark \end{cases}$$

$$t_p = t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-(0.4)^2}} \Rightarrow \omega_n = 1.15$$

از طرفی از سیستم فیدبک واحد داریم:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{k}{TS^2 + S + k} = \frac{k/T}{S^2 + \frac{1}{T}S + \frac{k}{T}}$$

$$S^2 + 2\zeta\omega_n S + \omega_n^2 = S^2 + \frac{1}{T}S + \frac{k}{T}$$

$$\begin{cases} \omega_n^2 = \frac{k}{T} \Rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{k}{T}} \\ 2\zeta\omega_n = \frac{1}{T} \end{cases}$$

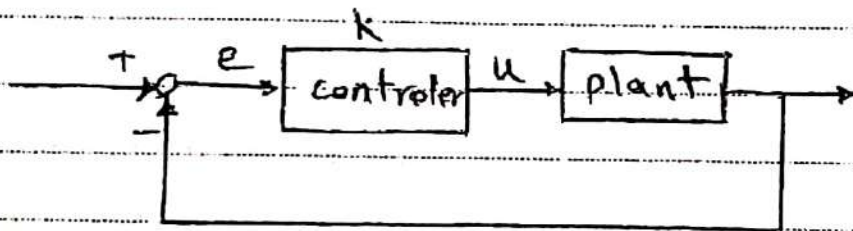
$$\Rightarrow T = \frac{1}{2\zeta\omega_n} = \frac{1}{2 \times 0.4 \times 1.15} = 1.09$$

$$\Rightarrow k = \omega_n^2 T = 1.15^2 \times 1.09 = 1.42$$

کنترلرهای خطی :

در حالت ایده آل کنترلر یک وسیله‌ای یک سو است یعنی حالت خروجی کنترلر به هیچ عنوان تأثیری در ورودی آن از طریق کنترل کننده ندارد و این سیگنال خروجی از طریق یک عمل کننده یا محرک، ورودی به سیستم را کنترل می‌کند. منظور از یک سو این است که برای مثال اگر یک جریان آب رودخانه را در نظر بگیریم آلودگی آب در پایین دست جریان تأثیری در آب بالادست نخواهد گذاشت.

حال با توجه به اینکه ورودی به کنترلر، خطای $e(t)$ (یعنی تفاوت $r(t)$ و $y(t)$) بوده و خروجی کنترلر یعنی $u(t)$ نیز خود ورودی کنترل شده به محرک یا plant مورد نظر می‌باشد پنج کنترلر خطی به صورت زیر تعریف می‌گردند.



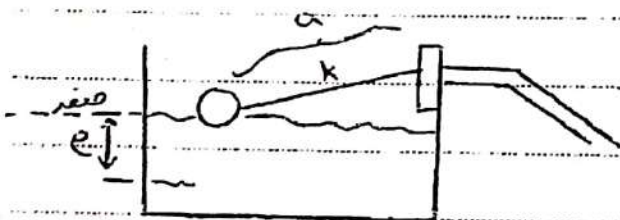
P-action or P-controller.

Proportional

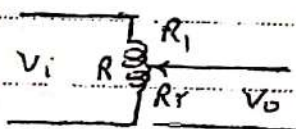
$$u(t) = k_e e(t)$$

این معادله نمایش یک کنترلر استاتیکی با ضریب پزرگنمایی k_e است.

چند نمونه از این سیستم‌ها:



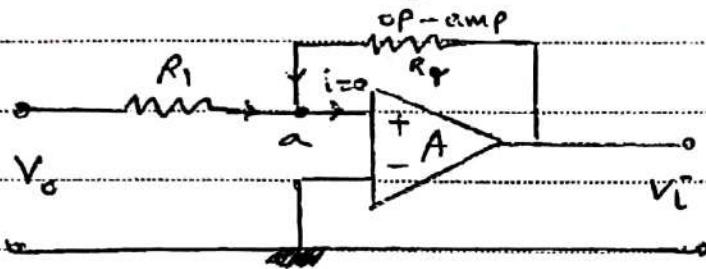
نسبت بین ورودی و خروجی در کنترلر :



$$K < 1$$

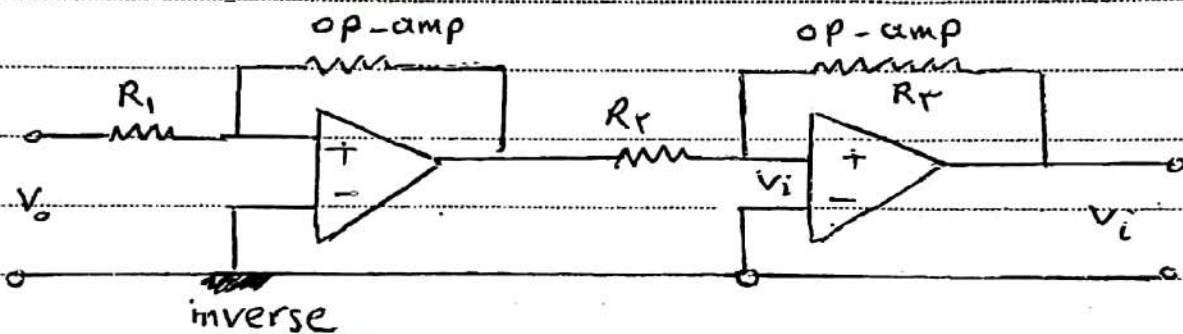
$$\frac{V_i}{V_o} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} = \frac{R_1}{R}$$

برای سیستم‌های الکتریکی مانند زیر، با اضافه کردن یک op-amp (دیگر انتهای سیستم خطای آن را کاهش می‌دهند)



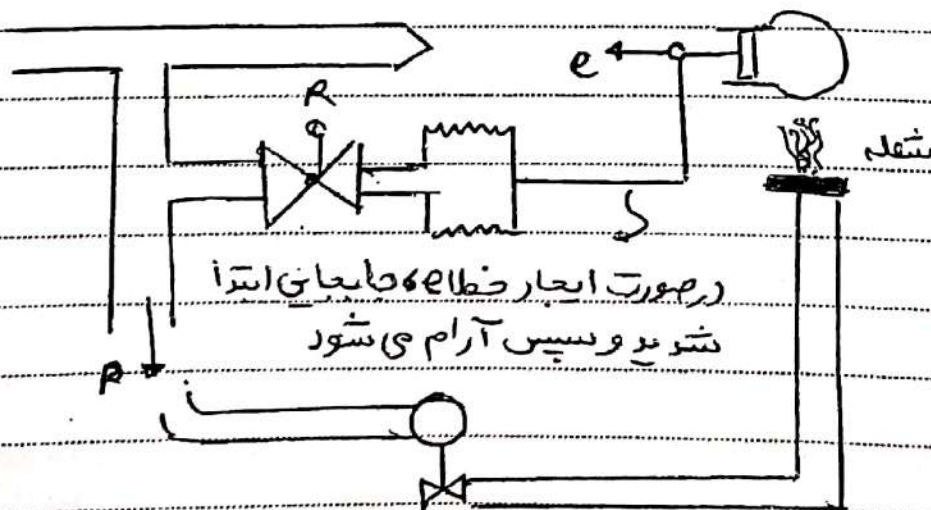
طبق قانون KCL (گره) در نقطه 'a':

$$\frac{V_o}{R_1} + \frac{V_i}{R_f} = 0 \Rightarrow \frac{V_o}{R_1} = -\frac{V_i}{R_f}$$



کار این سیستم‌ها این است که به صورت آبی فایر پروفشنال کار کنند.

یک نمونه دیگر از این سیستم، سیستم‌های کنترل فلوماتیکی است.



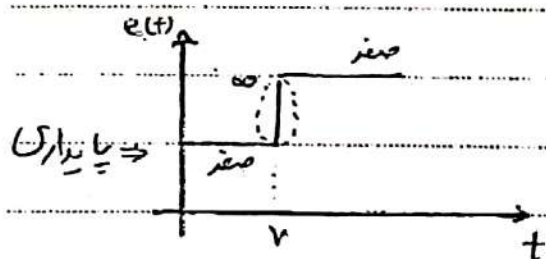
I - action ۲

$$u = \int_0^t e \, dt \Rightarrow u(s) = \frac{1}{s} e(s)$$

که این سیستم اختراع آقای زینین در سال ۱۸۴۰ بوده است

PD - action ۳

$$u(t) = k_c (1 + T_d D) e(t)$$



PI - action ۴

$$u(t) = k_c \left(1 + \frac{1}{T_i D} \right) e(t)$$

PID - action ۵

$$u(t) = k_c \left(1 + \frac{1}{T_i D} + T_d D \right) e(t)$$

شکل کلی کنترلرهای خطی به صورت زیر می باشد که این (رواقت شکل استاندارد شده) استگونه سیستم هاست:

$$u(t) = k_c \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) e(t)$$

که در این رابطه:

k_c = ثابت تناسبی

T_i = ثابت زمانی انتگرال

T_d = ثابت زمانی مشتق

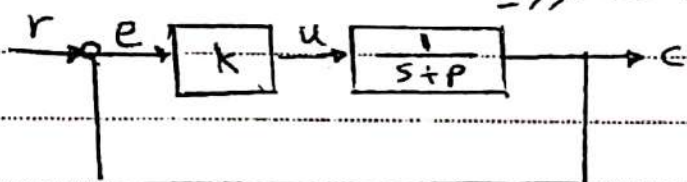
می باشد.

نکته -

مهم ترین خاصیت کنترلر I-action آن است که خطای حالت ماندگار را صفر می کند.

در مقابل کنترلر I-action $(\frac{1}{s})$ که خطای حالت ماندگار را صفر می کند کنترلر D-action (s) باعث می شود که سیستم مدار بسته پایداری را گزیند.

مثال) تابع تبدیل مدار باز و نمای سیستم مدار بسته ای به صورت زیر می باشد، موقعیت ریشه های سیستم مدار بسته را وقتی k از صفر تا بی نهایت تغییر می کند در صفحه مختلط s بدست آورید.



$$G(s) = \frac{k}{s+p}$$

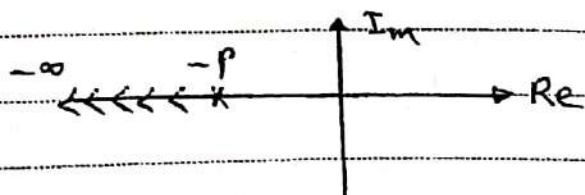
$$\frac{c}{r} = \frac{\frac{k}{s+p}}{1 + \frac{k}{s+p}} = \frac{k}{s+p+k}$$

$$F(s) = s+p+k = 0 \quad \text{معادله مشخصه}$$

$$\Rightarrow s = -(p+k)$$

$$k: 0 \rightarrow \infty$$

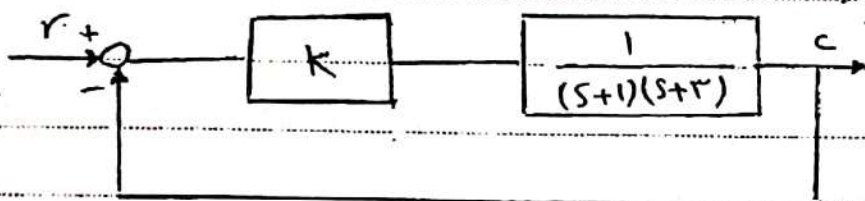
به ازای $k=0$ ریشه ی سیستم مدار بسته مساوی $s=-p$ است. (یعنی به ازای $k=0$ ریشه سیستم مدار بسته منطبق بر ریشه ی مدار باز است) و وقتی که k به تدریج بزرگ می شود و به سمت ∞ می رود مقواری نیز به سمت ∞ می رود.



$$\Rightarrow e^{-(p+k)t}$$

خطای سیستم سریع از بین می رود زیرا این سیستم یک سیستم سریع است که هر چه به آن ورودی دهیم زود خطا را از بین می برد

مثال) سیستم مدار بسته ای به صورت شکل زیر است. موقعیت ریشه های سیستم مدار بسته را وقتی k از صفر تا بی نهایت تغییر می کند در صفحه مقلد S بدست آورید



$$\frac{c}{r} = \frac{\frac{k}{(s+1)(s+3)}}{1 + \frac{k}{(s+1)(s+3)}} = \frac{k}{(s+1)(s+3) + k}$$

$$F(s) = (s+1)(s+3) + k = 0 \quad \text{معادله مشخصه}$$

$$\Rightarrow s^2 + 4s + 3 + k = 0$$

$$s = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4(3+k)}}{2} = -2 \pm \sqrt{1-k}$$

$$k: 0 \rightarrow \infty$$

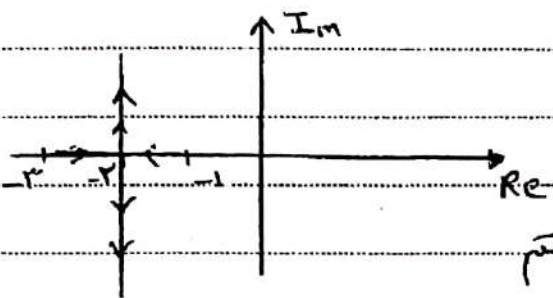
$$0 < k < 1 \Rightarrow \begin{cases} s_1 = -2 + \sqrt{1-k} \\ s_2 = -2 - \sqrt{1-k} \end{cases}$$

$$k=0 \Rightarrow \begin{cases} s_1 = -1 \\ s_2 = -3 \end{cases}$$

$$k=1 \Rightarrow \begin{cases} s_1 = -2 \\ s_2 = -2 \end{cases}$$

$$k > 1 \Rightarrow \begin{cases} s_1 = -2 + j\sqrt{k-1} \\ s_2 = -2 - j\sqrt{k-1} \end{cases}$$

$$k=\infty \Rightarrow \begin{cases} s_1 = -2 - j\infty \\ s_2 = -2 + j\infty \end{cases}$$



همان طور بی که از در شکل رو بروردیده می شود
چون ریشه ها همواره در سمت چپ محور
حقیقی قرار دارند به همین خاطر سیستم
هیچ گاه ناپایدار نمی شود حتی اگر سیستم
هم نوسانی شود.

نکته :

در سیستم ها جهت حرکت قطب ها به سمت صفرهاست که این صفرها یا
صفرهای محدود سیستم اند و یا صفرهای نامحدود (صفرهایی که در
بی نهایت قرار دارند) می باشد.

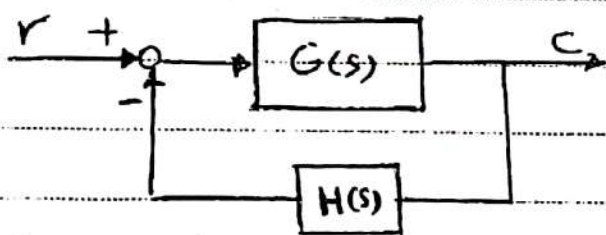
در سیستم مثال فوق نیز قطب ها در نهایت به صفرهای نامحدود می رسند
(صفرهایی که در بی نهایت قرار دارند) به همین خاطر هرگز ناپایدار نمی شوند.

« فصل هفتم »

رسم مکان هندسی ریشه ها:

از آنجایی که بدست آوردن ریشه ها و تشخیص پایداری سیستم همواره امکان پذیر نبور آتای لوکاس روش جدیدی را ابداع کرد که در آن با تشخیص ریشه های حلقه ی باز می توان حدس زد که ریشه ها روی سیستم حلقه بسته چه طور عمل می کنند این موضوع منجر به ایجاد روشی به نام رسم مکان هندسی ریشه ها گردید

عیب اصلی این روش این است که فقط بر حسب یک پارامتر کاری می کنند و برای مثال اگر بخواهیم کنترلی مانند PID-action را صورت بررسی قرار دهیم باید عملیات رسم مکان هندسی ریشه ها را سه مرتبه و برای سه پارامتر انجام دهیم.



$$G(s) = K G_o$$

$$\frac{C}{R} = \frac{G(s)}{1 + H(s)G(s)} \quad \Rightarrow \quad F(s) = 1 + H(s)G(s)$$

معادله ی مشخصه

که به ازای $H(s) = 1$ داریم:

$$F(s) = 1 + G(s) = 1 + K G_o(s) = 0$$

برای رسم مکان هندسی ریشه ها باید مطابق موارد زیر عمل کنیم:

۱. تعیین قطب ها و صفرهای تابع تبدیل مدار باز
۲. تعیین مکان هندسی ریشه ها روی محور حقیقی (شرط زاویه)
۳. تعیین تعداد مجانب ها
۴. تعیین زاویه ی مجانب ها

۵. تعیین محل برخورد مجانب ها با محور حقیقی

۶. تعیین نقاط شکست

۷. تعیین نقاط برخورد با محور موهومی

۸. تعیین زاویه خروج از قطب ها

که جلوتر به تفصیل تمامی مراحل فوق را شرح خواهیم داد.

۲. شرط زاویه

$$F(s) = 1 + G(s) = 0$$

$$\Rightarrow G(s) = -1 \Rightarrow |G(s)| = 1, \text{ or } |KG_o| = 1$$

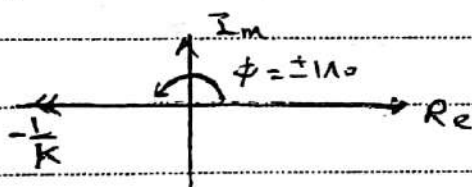
$$\angle G(s) = \angle KG_o = \angle -1 + 0j = \angle \left(\frac{-1}{1} \right) = \pm 180^\circ (2q+1)$$

or

$$\angle KG_o = \angle -1 \Rightarrow \angle G_o = \angle \frac{-1}{K}$$

که در هر صورت:

$$\angle G_o(j\omega) = \pm 180^\circ (2q+1) \quad q = 0, 1, 2, \dots$$



* زوایای مثلثی در جهت پارسا عکسگرد قرار دارند یعنی:



برای آنکه مکان هندسی ریشه بر روی محور حقیقی را بیابیم باید نقاط

آزمون را در نظر بگیریم که این نقاط آزمون باید شرط زاویه یا

$\pm 180^\circ (2K+1)$ را راضا نمایند. نقاط آزمون می توانند در هر جایی از

صفحه s در نظر گرفته شوند اما برای راحتی کار بهتر است که این نقاط

Page 144

Sina SID619

بر روی محور حقیقی در نظر گرفته شوند (در هر حالت باید نتیجه‌ی یکسانی بدست آید) همچنین هنگامی که نقطه‌ی آزمون بر روی محور حقیقی در نظر گرفته می‌شود زاویه‌ی حد نظریه را حتی بدست می‌آید در حالی که اکثر این نقطه در فضا باشد باید زوایای قطب‌ها و صفرها را تابع تبدیل مدار باز را نسبت به آن نقطه‌ی آزمون محاسبه کنیم و این کار دشواری است.

متصور از آنکه نقطه‌ی آزمون شرط زاویه را ارضا کند این است که باید از سایر قطب‌ها و صفرها را تابع تبدیل مدار باز نسبت به آن نقطه زاویه‌ها را محاسبه کرد و اگر مجموع زوایا $180^\circ - 540^\circ - \dots - 180^\circ (2K+1)$ شود آنگاه آن منطقه جزء مکان هندسی ریشه‌هاست.

نکته:

برای تشخیص شرط زاویه راه ساده‌تری نیز وجود دارد و آن است که ابتدا تمامی قطب‌ها و صفرها را حقیقی و مختلط را روی صفحه مشخص می‌کنیم پس از اولین صفریا قطبی که در منتهی‌الهی سمت راست صفحه است شروع به شمارش تعداد صفرها و قطب‌ها می‌کنیم. اگر مجموع نقطه به لحظه شمارش عددی فرد باشد، سمت چپ این صفریا قطبی که بر روی آن هستیم جزء مکان است و اگر زوج باشد جزء مکان نخواهد بود. وقت شود که قطب‌ها و صفرها مختلط به دلیل زوج بودن، تأثیری در شمارش ندارند و می‌توان آنها را نادیده گرفت (نادیده گرفتن از لحاظ شمارش برای رسم تمامی صفرها و قطب‌ها مورد نیاز است).

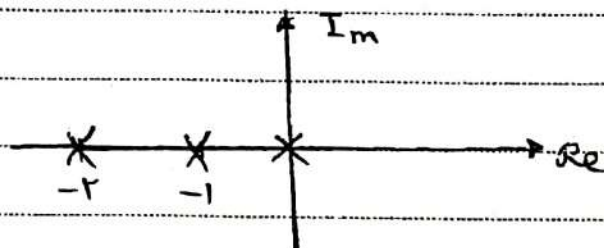
* باید توجه داشت که همواره تمام محور حقیقی جزء مکان هندسی ریشه‌ها می‌باشد ولی قسمتی از آن برای ضرب بهره $K > 0$ و قسمتی برای $K < 0$ و تمام بررسی‌های انجام شده در بالا برای $K > 0$ می‌باشند.

مثال) شرط زاویه را برای تابع تبدیل مدار ریا زیر بیابید.

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)}$$

صفرها : $m = 0$

قطبها : $n = 3 \rightarrow s = 0, -1, -2$

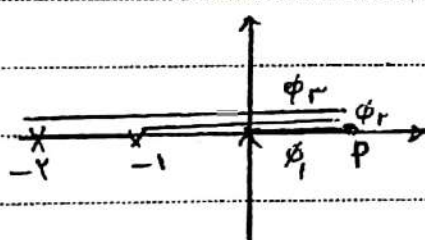


$$\phi_{total} = \pm 180^\circ (n - m)$$

توجه :

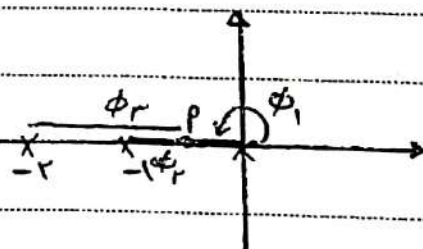
همواره قطبها را با علامت x و صفرها را با علامت o نشان می دهیم
و اگر تابع تبدیلی قطب مضاعف داشت آن را با $\times$ و اگر صفر مضاعف داشت
با علامت $\circ$ یا ∞ نشان می دهیم

پ. را نقطه ی آزمون می نامیم و آن را در ۴ مکان قرار می دهیم :

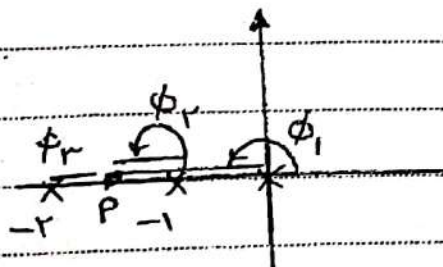


$$\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = 0$$

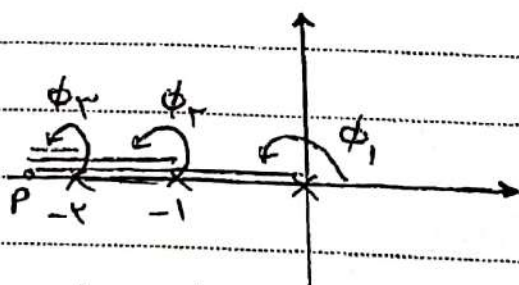
شرط زاویه
ارضایی نشود



$$\phi_1 = 180^\circ, \phi_2 = \phi_3 = 0 \quad \checkmark$$



$$\phi_1 = \phi_2 = 180^\circ, \phi_3 = 0 \quad \checkmark$$

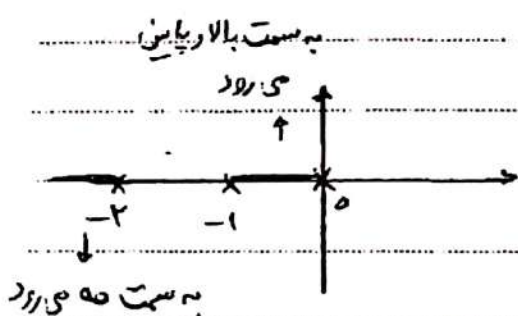


$$\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = 180^\circ \quad \checkmark$$

سینا

Sina SD619

در نتیجه مکان هندسی ریشه‌ها برابر است با :

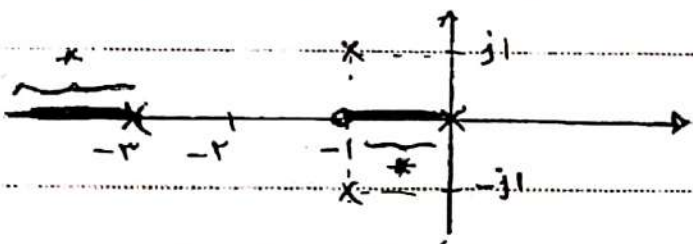


مثال) اگر تابع تبدیل حلقه باز سیستمی به صورت زیر باشد مکان هندسی ریشه‌ها را بیابید.

$$G(s) = \frac{k(s+1)}{s(s^2+2s+2)(s+3)}$$

صفرها : $n=1 \rightarrow s=-1$

قطب‌ها : $m=4 \rightarrow s=0, -3, -1 \pm j$



* طبق نکته‌ی صفحہ ۱۴۵

۳) مقدار مجانب‌ها :

اگر m مقدار صفرها و n مقدار قطب‌های تابع تبدیل $G(s)$ باشد آنگاه :

$$\text{مقدار مجانب‌ها} = n - m$$

۴) زاویه‌ی مجانب‌ها :

زاویه‌ی مجانب‌ها از فرمول زیر محاسبه می‌شود :

$$\text{زاویه‌ی مجانب‌ها} = \frac{\pm 180(29+1)}{n-m}$$

۵) محل برخورد مجانب‌ها یا محور حقیقی :

فرم کلی تابع تبدیل مدار باز سیستم به صورت زیر می‌باشد

$$G(s) = \frac{K \prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{j=1}^n (s - p_j)} = \frac{K [s^m + (z_1 + z_2 + \dots + z_m)s^{m-1} + \dots + z_1 z_2 \dots z_m]}{s^n + (p_1 + p_2 + \dots + p_n)s^{n-1} + \dots + p_1 p_2 \dots p_n}$$

$$= \frac{1}{s^{n-m} + [(p_1 + p_2 + \dots + p_n) - (z_1 + z_2 + \dots + z_m)]s^{n-m+1} + \dots}$$

بقیه ضرایب کوچکتر

$$\Rightarrow G(s) = \frac{1}{[s - \frac{(p_1 + p_2 + \dots + p_n) - (z_1 + z_2 + \dots + z_m)}{n-m}]^{n-m}}$$

که از مخرج معادله‌ی فوق می‌توان محل برخورد مجانب‌ها را طبق فرمول زیر پیدا نمود:

$$s_{\text{مجاذب}} = \frac{\sum p_i - \sum z_i}{n-m} \quad \text{or} \quad \frac{\sum \text{Re}(p_i) - \sum \text{Re}(z_i)}{n-m}$$

m تعداد قطب‌ها (درجه‌ی مخرج)

n تعداد صفرها (درجه‌ی صورت)

Re قسمت حقیقی ریشه‌ها

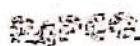
مثال) زاویه‌ی مجانب و محل برخورد مجانب یا محور حقیقی را در تابع تبدیل زیر بیابید.

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)}$$

$m = 0$ تعداد صفرها

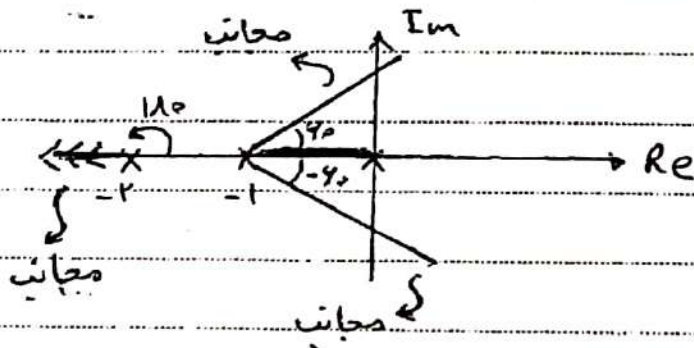
$n = 3 \rightarrow s = 0, -1, -2$ تعداد قطب‌ها

$$\text{زاویه مجانب} = \frac{\pm 180^\circ (p_g + 1)}{n-m} = \frac{\pm 180^\circ (2g+1)}{3-0} = +90^\circ, -90^\circ, 180^\circ$$



Sina SD619

$$S_{\text{مجان}} = \frac{\sum \text{Re}(P_i) - \sum \text{Re}(Z_i)}{n - m} = \frac{(0 - 1 - 2) - (0)}{3 - 0} = 1$$



نقطه‌ی شکست:

اثر تابع تبدیل مدار را بر این صورت زیر نشان دهیم:

$$G_o(s) = \frac{B(s)}{A(s)}$$

$$\Rightarrow \text{مقادیری مشخسه} \quad 1 + K G_o = 1 + \frac{K B(s)}{A(s)} = \frac{A(s) + K \cdot B(s)}{A(s)} = 0$$

$$\Rightarrow F(s) = A(s) + K B(s) = 0$$

کافی است از رابطه‌ی فوق مشتق بگیریم و K بدست آمده از آن را در معادله‌ی مشخسه قرار دهیم و s را محاسبه کنیم که این s همان نقطه‌ی شکست مورد نظر است.

$$\Rightarrow A'(s) + K B'(s) = 0 \rightarrow K = -\frac{A'(s)}{B'(s)}$$

بایدی گذاری این K در معادله‌ی مشخسه:

$$A(s) - \frac{A'(s)}{B'(s)} \cdot B(s) = 0$$

$$\Rightarrow A(s) B'(s) = B(s) A'(s)$$

اثر حل رابطه‌ی فوق نقطه‌ی شکست (s) بدست می‌آید.

البته راه حل دیگری نیز برای محاسبه وجود دارد که به صورت زیر می باشد:

$$K' = -K = \frac{A(s)}{B(s)}$$

$$\Rightarrow \frac{dK'}{ds} = \frac{A'(s)B(s) - B'(s)A(s)}{B^2(s)} = 0$$

بنابراین برای بدست آوردن نقاط شکست S کافی است بنویسیم:

$$K = -\frac{A(s)}{B(s)} \quad \text{or} \quad K' = \frac{A(s)}{B(s)}$$

$$\Rightarrow \frac{dK}{ds} = 0 \rightarrow S \text{ بدست می آید}$$

نکته:

۱. اگر بر روی محور حقیقی (و قطب یا دو صفر پشت سر هم قرار بگیرند نقطه S شکست وجود دارد. البته ممکن است برای یک صفر در محور حقیقی نیز نقطه شکست داشته باشیم (چون صفر دوم در بنی نهایت قرار دارد)

۲. مقام S های بدست آمده از رابطه بالا لزوماً نقاط شکست نیستند. اگر مقداری که برای S بدست آمده جزو مکان هندسی ریشه ها بود نیز نقاط شکست است وگرنه جز نقاط شکست نیست. البته می توان S ها را در معادله S مشخصه قرار داد و اگر $K > 0$ شد پس S مورد نظر جز نقاط شکست خواهد بود.

اگر از حل معادله به یک S مقلط رسیدیم آن را در معادله S مشخصه نداریم و این به صورت چنانچه K بدست آمده عددی حقیقی شد جز نقاط شکست مقلط محسوب می شود و اگر مقدار K مقلط شد جز نقاط شکست نخواهد بود.

مثال) نقاط شکست مثال قبل را بدست آورید

$$F(s) = 1 + \frac{k}{s(s+1)(s+2)} = 0$$

$$= \frac{s^3 + 3s^2 + 2s + k}{s(s+1)(s+2)} = 0$$

راه اول)

$$\Rightarrow s^3 + 3s^2 + 2s + k = 0$$

$$k' = -k = s^3 + 3s^2 + 2s$$

$$\Rightarrow \frac{d}{ds} k' = \frac{d}{ds} (-k) = \frac{d}{ds} (s^3 + 3s^2 + 2s) = 3s^2 + 4s + 2 = 0$$

$$s = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 24}}{6} = \begin{cases} s = 0,42 \checkmark \\ s = -1,57 \times \end{cases}$$

جزء مکان هندی
ریشه حقیقی

راه دوم)

$$G_o(s) = \frac{k}{s(s+1)(s+2)} = \frac{k}{s^3 + 3s^2 + 2s}$$

$$A(s) = 1 \quad \leftrightarrow \quad A'(s) = 0$$

$$B(s) = s^3 + 3s^2 + 2s \quad \leftrightarrow \quad B'(s) = 3s^2 + 4s + 2$$

$$A(s)B'(s) = A'(s)B(s)$$

$$3s^2 + 4s + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} s = 0,42 \checkmark \\ s = -1,57 \times \end{cases}$$

✓ نقاط برخورد با محور موهومی

برای تعیین نقاط برخورد با محور موهومی در روش وجود دارد

الف) روش روات

ب) جای گذاری $s = j\omega$ در معادله مشخصه

مثال) در مثال قبل، نقاط برخورد با محور موهومی را بیابید.

$$F(s) = s^3 + 3s^2 + 2s + k = 0$$

الف) روش راوش:

s^3	1	2	
s^2	3	k	
s^1	$\frac{k-6}{3}$	0	$\Rightarrow \frac{k-6}{3} = 0 \Rightarrow k = 6$
s^0	k		

زمانی که سطری صفر شود آنگاه از سطر قبل ریشه‌ها را می‌توان بدست آورد یعنی:

$$s^2 \mid \begin{array}{cc} 3 & k \end{array} \Rightarrow 3s^2 + k = 0$$

$$k = 6 \rightarrow 3s^2 + 6 = 0 \rightarrow s^2 = -2 \rightarrow s = \pm j\sqrt{2}$$

ب) روش $s = j\omega$

$$\Rightarrow (j\omega)^3 + 3(j\omega)^2 + 2(j\omega) + k = 0$$

$$-j\omega^3 - 3\omega^2 + 2j\omega + k = 0$$

$$\Rightarrow (k - 3\omega^2) + j(2\omega - \omega^3) = 0$$

قسمت حقیقی و موهومی را مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases} 2\omega - \omega^3 = 0 & \rightarrow \omega(2 - \omega^2) = 0 \Rightarrow \omega = 0, \pm \sqrt{2} \\ k - 3\omega^2 = 0 & \Rightarrow k = 3\omega^2 = 3(2) = 6 \end{cases}$$

$$s = j\omega = \pm j\sqrt{2}$$

۸ زاویدی خروج از قطب ها یا زاویدی ورود به قطب ها

برای این منظور به صورت زیر عمل می کنیم :

(I) از قطب یا صفر مورد نظر به تمام قطب ها و صفرهای دیگر هر مدلی که می خواهند باشند - وصل می کنیم

(II) در هر قطب یا صفر (به جز صفر یا قطب مورد نظر) یک خط افقی رسم می کنیم

(III) روی این خط در جهت مثلثاتی شروع به حرکت می کنیم تا خط واصل بین نقطه آزمون و صفر یا قطب را قطع کند

(IV) زاوید را می خوانیم

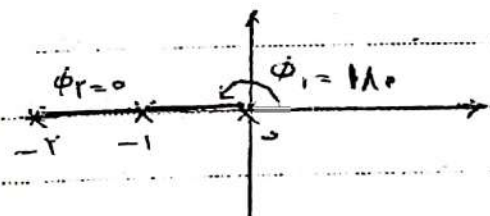
آنگاه داریم :

$$\left(\begin{array}{c} \text{زاویدی خروج از} \\ \text{قطب} \end{array} \right) = 180 - \left(\begin{array}{c} \text{جمع زاوید بردارهای} \\ \text{رسم شده از سایر قطب ها} \\ \text{به آن قطب} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \text{جمع زاوید بردارهای} \\ \text{رسم شده از سایر صفر ها} \\ \text{به آن قطب} \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{c} \text{زاویدی ورود به} \\ \text{صفر} \end{array} \right) = -180 + \left(\begin{array}{c} \text{جمع زاوید بردارهای} \\ \text{رسم شده از سایر} \\ \text{قطب ها به آن صفر} \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c} \text{جمع زاوید بردارهای} \\ \text{رسم شده از سایر} \\ \text{صفر ها به آن صفر} \end{array} \right)$$

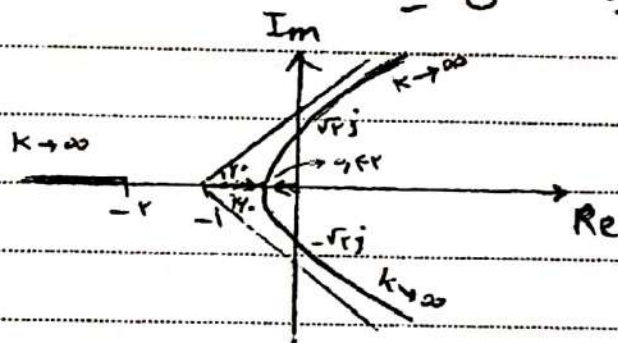
مثال) با توجه به مراحل طی شده برای رسم مکان هندسی ریشه ها در چند مثال گذشته پس از تعیین زاویدی خروج از قطب ها ، مکان هندسی ریشه ها را رسم کنید -

برای نقطه ۱ -



$$\text{زاویدی خروج} = 180 - (180 + 0) + (0) = 0$$

برای دو نقطه‌ی دیگر نیز به همین ترتیب بدست می‌آید.



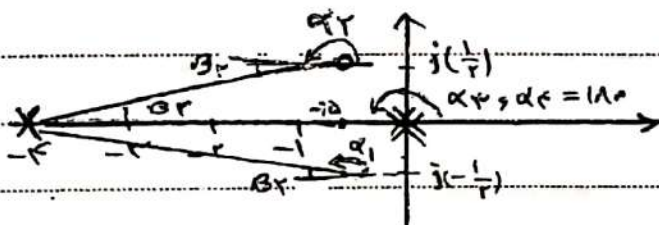
از اینجا به بعد
سیستم ناپایدار
است.

مثال) اگر تابع تبدیل مدار با زیری به صورت زیر باشد زاویه‌ی ورود به صفر و خروج از قطب را برای تمامی صفرها و قطب‌های موجود حساب کنید.

$$K G(s) = \frac{K(s^2 + s + \frac{1}{4})}{s^2(s + 4)}$$

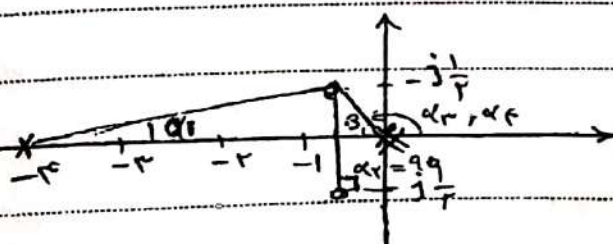
صفرها: $s^2 + s + \frac{1}{4} = 0 \rightarrow s = -\frac{1}{2} \pm j\frac{1}{2}$

قطب‌ها: $s^2(s + 4) = 0 \rightarrow s = 0, 0, -4$



$$\beta_2 = \tan^{-1}\left(\frac{\frac{1}{2}}{4 - 1/2}\right) = 1.13 \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 180 - 1.13 = 171.87 \\ \alpha_2 = 180 + 1.13 = 181.13 \end{cases}$$

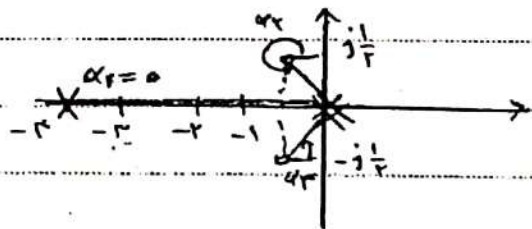
$\Rightarrow$ زاویه‌ی خروج از (قطب -4): $180 - (180 + 180) + (181.13 + 171.87) = 180$



$$\beta = \tan^{-1} \left(\frac{1/r}{1/r} \right) = 45^\circ \Rightarrow \alpha_p = \alpha_r = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$$

$$(\text{زاویه ورود به صفر}) = -180^\circ + (135^\circ + 135^\circ + 180^\circ) - (90^\circ) = 180^\circ$$

$$\left(-\frac{1}{r} + j\frac{1}{r} \right)$$



$$\alpha_p = 135^\circ - 45^\circ$$

$$\alpha_p = 45^\circ$$

$$(\text{زاویه خروج به دو قطب صفر}) = 180^\circ - (0^\circ) + (135^\circ - 45^\circ + 45^\circ) = 180^\circ$$

در نتیجه زاویه ورود به هر قطب صفر برابر است با:

$$\frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$$

توجه:

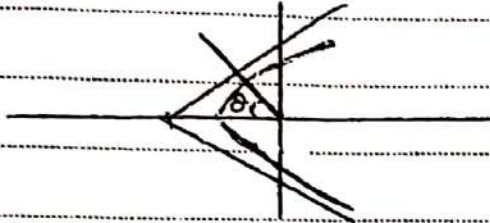
مکان هندسی ریشه‌ها را صرفاً برای طراحی کنترلرها رسم می‌کنند. برای اینکه پاسخ بهترین مسئله (بهترین K) را برای یک ζ خاص بدست آوریم کافی است θ را از رابطه‌ی زیر بدست آوریم (θ در سمت چپ محور حقیقی و نسبت به این محور در جهت ساعتگرد تعریف می‌شود) از محل برخورد خط حاصل از این زاویه با نمودار بهترین نقطه مورد نظر بدست می‌آید.

همچنین برای بدست آوردن ریشه‌ها (s) و همچنین K (ضریب بهره) و ω_n به روش زیر عمل می‌کنیم.

$$(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)(s + p) = F(s)$$

معادله‌ی مشخصه

مثال) در مثال های قبل تر مکان هندسی تابع تبدیل $G(s) = \frac{k}{s(s+1)(s+2)}$ را رسم نمودیم مقدار θ ، ریشه ها و k را به ازای $\zeta = 0,5$ محاسبه کنید



$$\theta = \pm \cos^{-1} \zeta = \pm \cos^{-1} 0,5 = \pm 90^\circ$$

$$F(s) = s^3 + 3s^2 + 2s + k$$

$$\Rightarrow (s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)(s + p) = s^3 + 3s^2 + 2s + k$$

$$\Rightarrow s^3 + (p + 2\zeta\omega_n)s^2 + (2p\zeta\omega_n + \omega_n^2)s + p\omega_n^2 = s^3 + 3s^2 + 2s + k$$

به ازای $\zeta = 0,5$ داریم $(2\zeta = 1)$:

$$\begin{cases} p + \omega_n = 3 \\ p\omega_n + \omega_n^2 = 2 \Rightarrow \omega_n(p + \omega_n) = 2 \Rightarrow \omega_n(3) = 2 \\ p\omega_n^2 = k \end{cases} \Rightarrow \boxed{\omega_n = 2/3}$$

$$p + \omega_n = 3 \Rightarrow p = 3 - \frac{2}{3} = \frac{7}{3} \Rightarrow \boxed{p = \frac{7}{3}}$$

$$p\omega_n^2 = k \Rightarrow k = \frac{7}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 1,0222 \Rightarrow \boxed{k = 1,0222}$$

$$\Rightarrow s^3 + 3s^2 + 2s + 1,0222 = (s^2 + \frac{2}{3}s + \frac{4}{9})(s + \frac{7}{3})$$

$$\Rightarrow s^2 + \frac{2}{3}s + \frac{4}{9} = 0 \Rightarrow 4s^2 + 4s + 4 = 0$$

Sina SD619

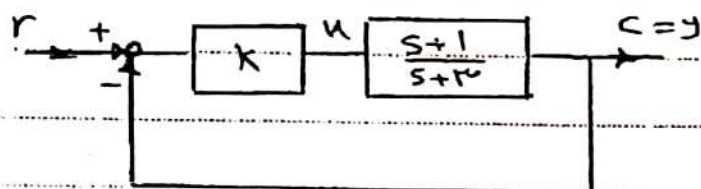
$$s = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 14(9)}}{18} = \frac{-7 \pm j16.39}{18}$$

$$s_1 = -0.389 - j0.911$$

$$s_2 = -0.389 + j0.911$$

نقش صفر در پاسخ سیستم های کنترلی:
۱. بلوکه کردن انتقال

۲. قطب تابع تبدیل حلقه بسته به سمت صفر سیستم حلقه باز میل می کند اگر $k \rightarrow \infty$ باشد.



$$\frac{C}{R} = \frac{K \frac{s+1}{s+3}}{1 + K \frac{s+1}{s+3}} = \frac{K(s+1)}{(s+3) + K(s+1)}$$

$$G_o = \frac{s+1}{s+3} \rightarrow s+3=0 \rightarrow s=-3 \Rightarrow e^{-3t} \Rightarrow \omega = 3 \frac{\text{rad}}{s}$$

$$\frac{y}{u} = \frac{s+1}{s+3} \Big|_{\omega=1 \text{ rad/s}} = 0$$

↓
 $e^{-t} \Rightarrow s = -1$

۳. صفرهای فایدا باعث پدیده‌ی undershoot می شوند.
مثلاً:

$$y(s) = \frac{1-s}{s(1+s)(1+0.5s)}$$

که با لاپلاس معکوس گرفتن از رابطه‌ی فوق داریم:

$$y(s) = \frac{1-s}{(1+s)(1+0.5s)} = \frac{a}{s} + \frac{b}{1+s} + \frac{c}{(1+0.5s)}$$

$$\Rightarrow y(t) = 1 + 3e^{-t} - 4e^{-2t}$$

۴. بر روی شرط زاویه و محل مجانب‌ها تأثیری ندارد.

$$\frac{s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots}{s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \dots} \quad n > m$$

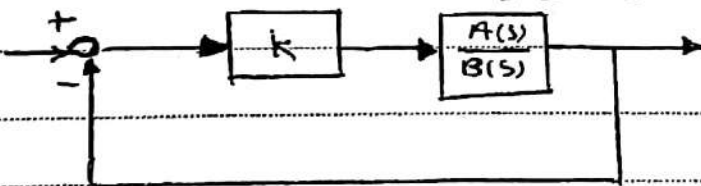
$$S_{\text{مجاذب}} = \frac{\sum p_i - \sum z_i}{n-m} \quad \& \quad \text{شرط زاویه} = \frac{\pm 180(2q+1)}{n-m}$$

۵. گاهی صفرها و قطب‌ها با یکدیگر خنثی شوند:

$$G(s) = \frac{s+1}{(s+1)(s+3)} = \frac{1}{s+3}$$

$s+1$ در جایی از سیستم در حال کار کردن است اگر چه دیده نمی‌شود.

۶. عدم جابجایی با استفاده از حلقه‌ی فیدبک:



$$\frac{C}{R} = \frac{KB(s)}{A(s) + KB(s)}$$

۷. استفاده از معکوس سیستم:



$$c=r \Rightarrow k_c = k_p^{-1}$$

$$G(s) = \frac{s-1}{s+3} \rightarrow G^{-1}(s) = \frac{s+3}{s+1} \quad \text{X}$$

۸. صف‌های پایدار ترکیب محور موهومی باعث فرجهش‌های بسیار بزرگ خواهند شد.

$$G_1 = \frac{10s+1}{s^2+4s+2}$$

$$G_2 = \frac{s+1}{s^2+4s+2}$$

$$\downarrow s = -\frac{1}{10}$$

$$\downarrow s = -1$$

«باعث ایجاد فرجهش می‌شود»

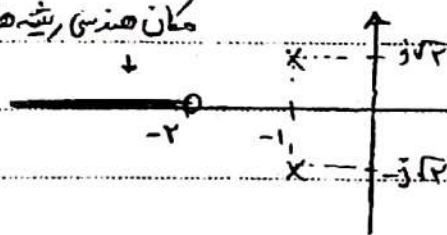
مثال) مکان هندسی ریشه‌ها را برای تابع تبدیل مدار باز زیر رسم کنید.

$$G(s) = \frac{K(s+2)}{s^2+2s+3}$$

$$\text{تعداد صف‌ها : } m=1 \rightarrow s = -2$$

$$\text{تعداد قطب‌ها : } n=2 \rightarrow s = \frac{-2 \pm \sqrt{4-12}}{2} = -1 \pm j\sqrt{2}$$

مکان هندسی ریشه‌ها



$$\alpha_1 = 90^\circ$$

$$\alpha_2 = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{1}\right) = 55^\circ$$

$$\text{زاویه خروج از قطب مزبور } (-1 + j\sqrt{2}) = 180^\circ - \alpha_1 + \alpha_2 = 180^\circ - 90^\circ + 55^\circ = 145^\circ$$

* چون اشکال مکان هندسی نسبت به محور حقیقی متقارنتر نیاز می‌باشد به محاسبه زاویه‌ی

خروج قطب برای 2 کد 1 - می باشد

$$n - m = 2 - 1 = 1 \quad \text{تعداد مجانب}$$

$$S_{\text{مجاذب}} = \frac{\sum P_i - \sum z_i}{n - m} = \frac{-1 + \sqrt{2}j - 1 - \sqrt{2}j + 2}{2 - 1} = 0$$

$$\text{زاویه مجانب} = \frac{\pm 180(2g+1)}{n - m} = +180$$

* قطبی شکست برابر است با ∞

$$F(s) = 1 + \frac{k(s+2)}{s^2 + 2s + 2} = 0$$

$$\Rightarrow k = -\frac{s^2 + 2s + 2}{s + 2}$$

$$\frac{dk}{ds} = 0 \Rightarrow \frac{(2s+2)(s+2) - (s^2 + 2s + 2)}{(s+2)^2} = 0$$

$$2s^2 + 4s + 2 - s^2 - 2s - 2 = 0$$

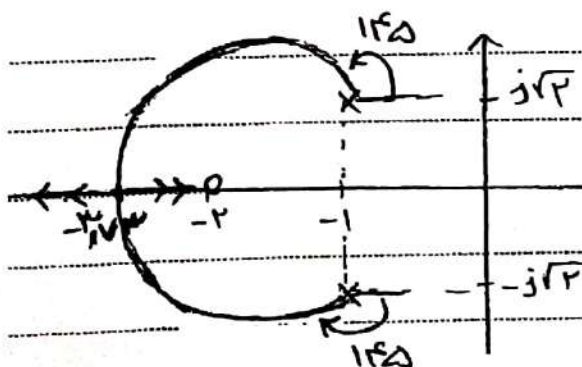
$$s^2 + 2s = 0$$

$$s = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 0}}{2} = -2 \pm \sqrt{2}$$

$$s = -0.414$$

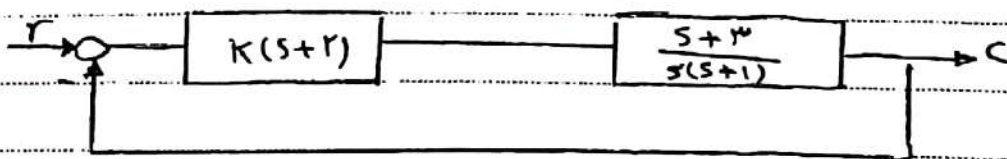
$$s = -2.414$$

جزء
مندی
ریشه هاست



شکل فوق کاملاً دایره فرم است

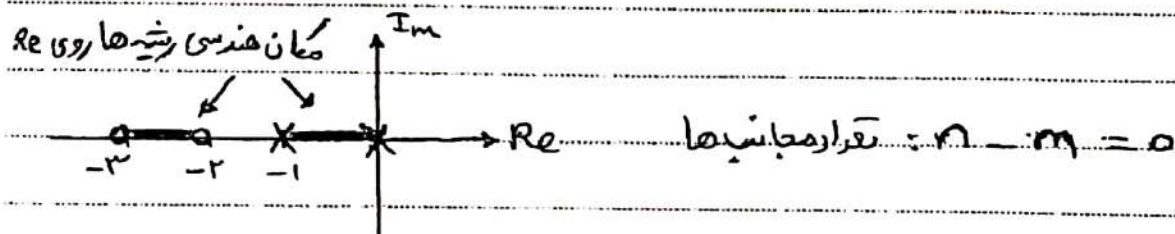
مثال مکان هندسی مدار شکل زیر را رسم نمایید.



$$G(s) = \frac{k(s+2)(s+3)}{s(s+1)}$$

قطبها: $n=2 \rightarrow s=0, -1$

صفرها: $m=2 \rightarrow s=-2, -3$



زاوی می مجانبها: $\frac{\pm 180(29+1)}{n-m} = \frac{\pm 180(29+1)}{0} = \infty$ مجانب ندارد.

* نقطه شکست برابر است با:

$$A(s) = (s+2)(s+3) = s^2 + 2s + 6 \leftrightarrow A'(s) = 2s + 2$$

$$B(s) = s(s+1) = s^2 + s \leftrightarrow B'(s) = 2s + 1$$

$$\Rightarrow A(s)B'(s) = B(s)A'(s)$$

$$(s^2 + 2s + 6)(2s + 1) = (2s + 2)(s^2 + s)$$

که در نهایت داریم:

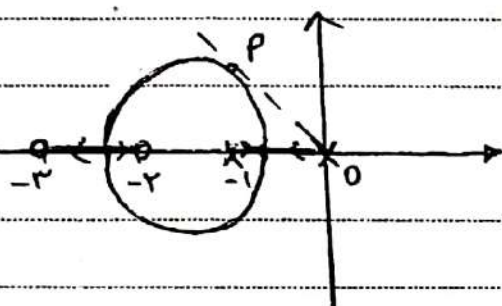
$$4s^2 + 12s + 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} s = -2, 3/4 \checkmark \\ s = -0, 42 \checkmark \end{cases}$$

راه دیگر محاسبه نقطه شکست به صورت زیر است:

$$1 + G(s) = 0$$

$$1 + \frac{k(s+2)(s+3)}{s(s+1)} = 0 \rightarrow k = -\frac{s(s+1)}{(s+2)(s+3)}$$

$$\frac{dk}{ds} = 0 \Rightarrow ks^2 + ks + 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} s = -2,36 \checkmark \\ s = -0,73 \checkmark \end{cases}$$



* برای محاسبه optimum از مباحثات بردار مماس رسم می کنیم که برای پیدا کردن نقطه P باید از یک سری از فرمول های هندسی استفاده کرد.

$$1 + k \frac{B(s)}{A(s)} \Rightarrow \frac{|A(s)|}{|B(s)|} = \overline{OP}$$

نکته:

مركز ثقل قطب يا ریشه های مدار بسته به صورت زیر تعریف می شود

$$c.g = \frac{\sum p_i}{n}$$

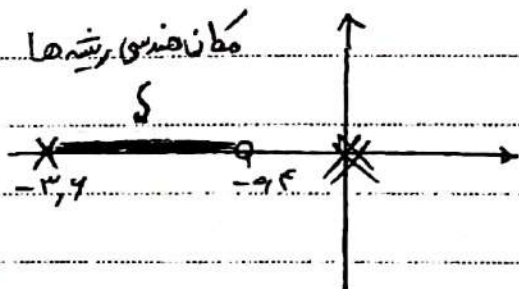
مثلاً برای مثال فوق داریم:

$$c.g = \frac{0 - 1}{2} = -0,5$$

مثال) برای تابع تبدیل مدار بالا از زیر مکان هندسی ریشه ها را رسم نمایید.

$$G(s) = \frac{k(s+0,4)}{s^2(s+2,4)}$$

$$\left| \begin{array}{l} \text{تعداد قطب ها } n = 3 \rightarrow s = 0, 0, -2,4 \\ \text{تعداد صفرها } m = 1 \rightarrow s = -0,4 \end{array} \right.$$



تعداد قطبها $n - m = 3 - 1 = 2$

$$\sigma_{\text{میانگین}} = \frac{\sum p_i - \sum z_i}{n - m} = \frac{(0 + 0 - 3.4) - (-0.4)}{3 - 1} = -1.4$$

$$\angle \text{زاویه‌ی قطبها} = \frac{\pm 180(2q + 1)}{n - m} = \frac{\pm 180(2q + 1)}{2} = \pm 90$$

نقطه‌ی شکست برابر است با:

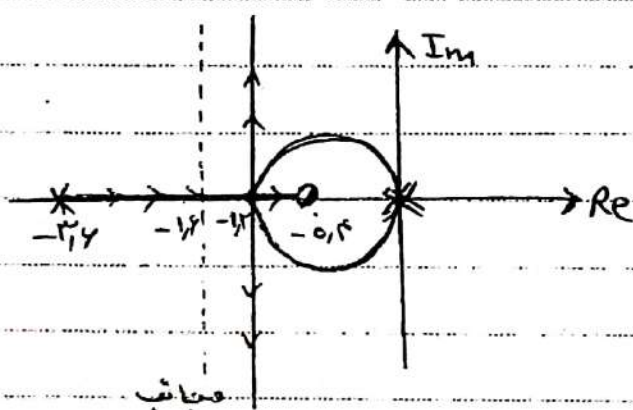
$$1 + \frac{k(s + 0.4)}{s^2(s + 3.4)} = 0 \rightarrow k = \frac{-s^2(s + 3.4)}{(s + 0.4)}$$

$$\frac{dk}{ds} = \frac{-(3s^2 + 3.4s)(s + 0.4) + (s^3 + 3.4s^2)}{(s + 0.4)^2} = 0$$

⇒

$$\Rightarrow \begin{cases} s = 0 \\ s = -1.4 \\ s = -1.2 \end{cases}$$

وقتی صفر داریم یک صفر داریم
وقتی ۰ داریم
وقتی ۰ داریم یعنی یکی دیگر هم داریم



میانگین

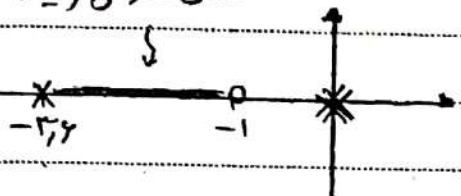
مثال: برای تابع تبدیل مدار باز زیر مکان هندسی ریشه‌ها را رسم کنید.

$$G(s) = \frac{k(s + 1)}{s^2(s + 3.4)}$$

Sina Sanedoust

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{تعداد قطب ها} : n = 3 \rightarrow s = 0, 0, -1.4 \\ \text{تعداد صفر ها} : m = 1 \rightarrow s = -1 \end{array} \right.$$

مکان صفری، ریشه ها

تعداد مجانب ها $n - m = 3 - 1 = 2$

$$s_{\text{مجانِب}} = \frac{\sum p_i - \sum z_i}{n - m} = \frac{(0 + 0 - 1.4) - (-1)}{3 - 1} = -1.2$$

$$\text{زاویه‌ی مجانب} : \frac{\pm 180(2q+1)}{n-m} = \frac{\pm 180(2q+1)}{3-1} = \pm 90^\circ$$

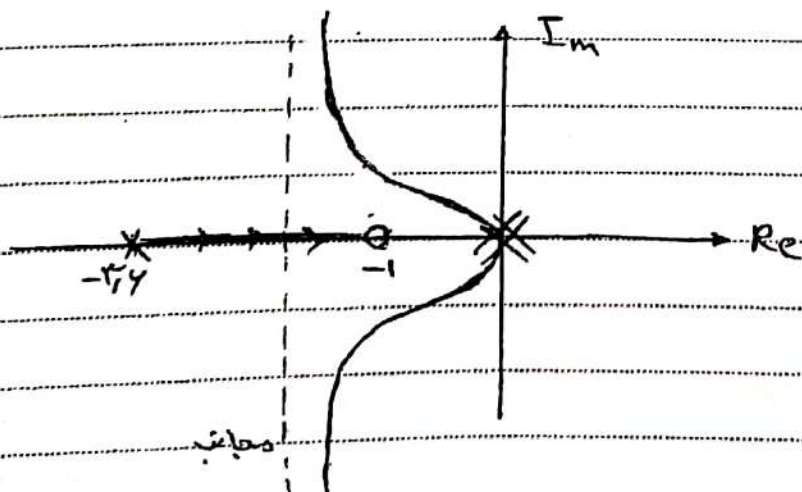
نقاط شکست برابرند با :

$$1 + \frac{k(s+1)}{s^2(s+1.4)} = 0 \rightarrow k = -\frac{s^2(s+1.4)}{(s+1)}$$

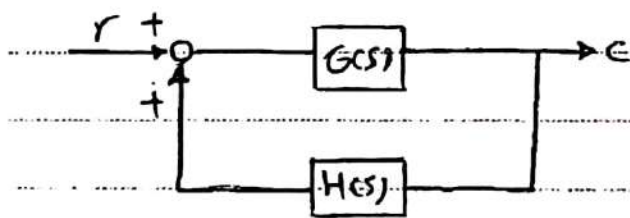
$$\frac{dk}{ds} = \frac{-(2s^2 + 1.4s)(s+1) + s^2(s+1.4)}{(s+1)^2}$$

 $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} s = 0 \quad \checkmark \\ s = -1.42 \pm j 0.193 \quad \checkmark \end{array} \right.$$



سیستم‌های کنترلی با فیدبک مثبت Positive feedback :



$$\frac{e}{r} = \frac{G(s)}{1 - H(s)G(s)}$$

رسم مکان هندسی ریشه‌ها برای فیدبک مثبت یا $k < 0$ تفاوت‌های زیر را با فیدبک منفی یا $k > 0$ دارد :

۱. محل مکان روی محور حقیقی تمام نقاط به جز نقاط مربوط به $k > 0$ است
منفی : $1 + G_0 \Rightarrow \angle G(j\omega) = -1 + 0 = \pm 180^\circ (2q+1)$

مثبت : $1 - G_0 \Rightarrow \angle G(j\omega) = 1 + 0 = \pm 180^\circ (2q)$

۲. زاویه‌ی مجانب‌ها $\pm \frac{180^\circ (2q)}{n-m}$ است

۳. زاویه‌ی خروج از قطب یا ورود به صفر را به جای 180° از 0° کم می‌کنیم

$$\left(\begin{array}{l} \text{زاویه‌ی ورود} \\ \text{به قطب‌ها} \end{array} \right) = 0 - \left(\begin{array}{l} \text{جمع زوایای بردارهای} \\ \text{رسم شده از سایر قطب‌ها} \\ \text{به آن قطب} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{l} \text{جمع زوایای بردارهای رسم} \\ \text{شده از سایر صفرها به} \\ \text{آن قطب} \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{زاویه‌ی خروج از} \\ \text{صفرها} \end{array} \right) = 0 - \left(\begin{array}{l} \text{جمع زوایای بردارهای} \\ \text{رسم شده از سایر صفرها} \\ \text{به آن صفر} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{l} \text{جمع زوایای بردارهای رسم} \\ \text{شده از سایر قطب‌ها به} \\ \text{آن صفر} \end{array} \right)$$

۴. بیرونی شکل به جای حرکت از قطب به صفر، جهت فلش‌ها از صفر به قطب است

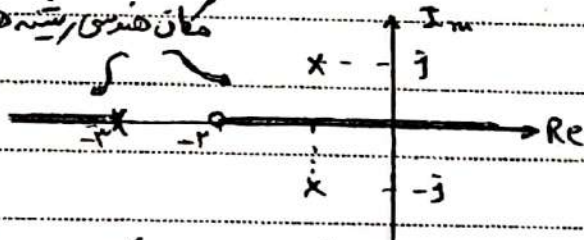
در سایر موارد دستورالعمل‌های $k > 0$ را می‌توان بکاربرد البته باید توجه داشت مکان هندسی روی محور حقیقی در این حالت قرینه‌ی فیدبک منفی است

مثال) تابع تبدیل مدارهای زیر سیستمی با فیدبک مثبت به صورت زیر است، مکان
هزیمی ریشه‌ها را رسم کنید

$$G(s) = \frac{k(s+2)}{(s+3)(s^2+2s+2)}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{تعداد قطب‌ها} : n=3 \rightarrow s = -3, -1-j, -1+j \\ \text{تعداد صفرها} : m=1 \rightarrow s = -2 \end{array} \right.$$

مکان هزیمی ریشه‌ها



$$\text{تعداد مجانب} : n-m = 3-1 = 2$$

$$s_{\text{مجاذب}} = \frac{\text{Re}(\sum p_i - \sum z_i)}{n-m} = \frac{(-3-1-j-1+j) - (-2)}{3-1} = -\frac{3}{2}$$

$$\text{زاویه‌ی مجانب} = \frac{\pm 180^\circ(2q)}{n-m} = \frac{\pm 180^\circ(2q)}{3-1} = \pm 180^\circ q = 0^\circ, 180^\circ$$

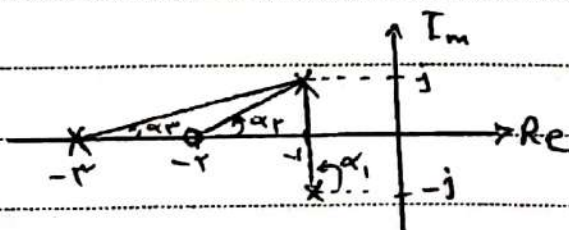
نقاط شکست عبارتند از:

$$1 + \frac{k(s+2)}{(s+3)(s^2+2s+2)} = 0 \Rightarrow k = -\frac{(s+3)(s^2+2s+2)}{s+2}$$

$$\frac{dk}{ds} = 0 \Rightarrow 2s^3 + 11s^2 + 10s + 10 = 0 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} s = -0.11 \checkmark \\ s = 1.25 \pm 0.77j \end{array} \right.$$

$$\text{زاویه‌ی ورودی} : 0 - (90^\circ + 27^\circ) + 45^\circ = -72^\circ$$

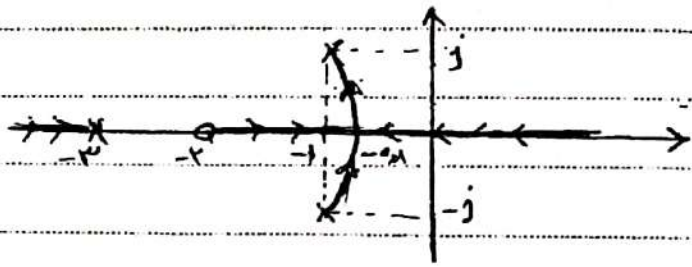
قطب $-1-j$



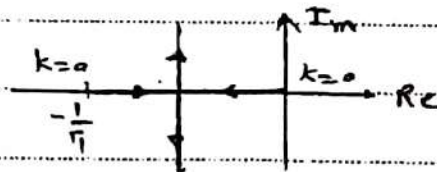
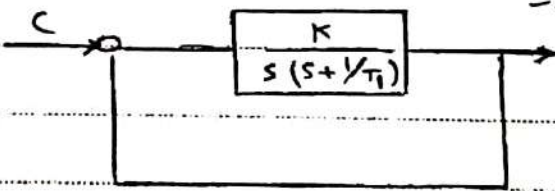
$$\alpha_1 = 90^\circ$$

$$\alpha_2 = \tan^{-1}\left(\frac{1}{1}\right) = 45^\circ$$

$$\alpha_3 = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 27^\circ$$

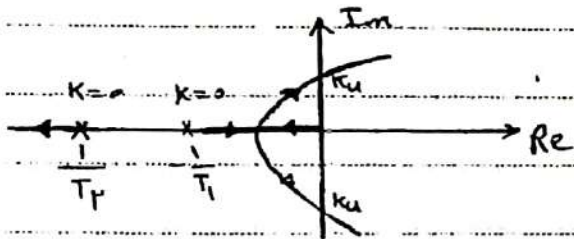


تأثیر اضافه کردن قطب یا صفر در پایداری و رفتار سیستم:
سیستم مدار بسته ای مانند زیر را در نظر بگیرید



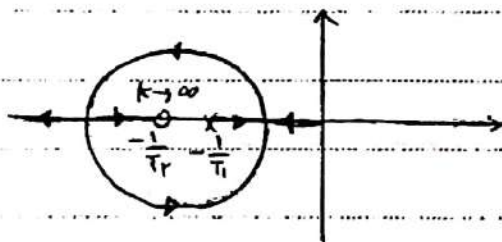
$$\text{مکان هندسی ریشه تابع تبدیل} \quad \frac{K}{s(s + \frac{1}{T_i})}$$

اضافه کردن یک قطب باعث تغییر شکل مکان هندسی به صورت زیر می شود:



$$G(s) = \frac{K}{s(s + \frac{1}{T_i})(s + \frac{1}{T_r})}$$

اضافه کردن یک صفر باعث تغییر شکل مکان هندسی به صورت زیر می شود:



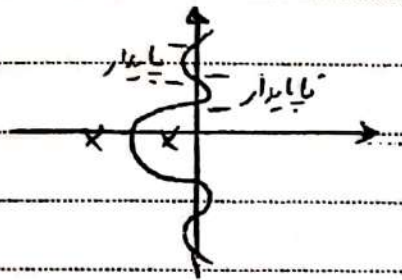
$$G(s) = \frac{K(s + \frac{1}{T_r})}{(s + \frac{1}{T_i})}$$

نتیجه کلی:

۱. اضافه کردن صفر به یک سیستم (به تابع تبدیل حلقه باز PD-action) سبب می شود تا مکان هندسی ریشه ها به سمت چپ متغایل شود که در این صورت سیستم پایدارتر و عکس العمل سیستم سریعتر می شود

۲. اضافه کردن قطب به یک سیستم (تابع تبدیل حلقه باز) موجب می شود که مکان هندسی ریشه ها به سمت راست متمایل شود که در این صورت سیستم ناپایدار تر و عکس العمل سیستم کنترل تر می شود.

* برخی از سیستم ها هستند که دارای پایداری مشروط می باشند که این سیستم ها به صورت زیر هستند:

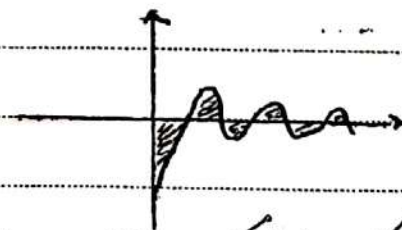


کنترل فرآیندها (تنظیم پارامترهای کنترل):
سیستم ها وقتی دارای بهترین رفتار هستند که:

۱. عکس العمل سیستم مدار بسته نسبت به ورودی پله ای واحد دارای کوتاه ترین زمان استقرار (نشست) باشد.
$$t_s = \frac{3}{\zeta \omega_n}$$
۲. حداکثر دامنه عکس العمل سیستم مدار بسته نسبت به ورودی پله ای واحد دارای محدودیت مقدار باشد.
$$M_p = e^{\left(-\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)\pi}$$
۳. در تعیین پارامترهای کنترل توابعی از خطای سیستم مدار بسته دارای مقدار حداقل باشد. مثلاً سطح زیر منحنی قدر مطلق خطا در طول زمان حداقل باشد.

اگر تمام خطاها را با هم جمع کنیم،

$$IAE = \int_0^{\infty} |e(t)| dt$$



چیز تابع دیگر خطا که حداقل بودن هر کدام از آن ها می تواند اساس انتخاب تعیین پارامترهای کنترل باشند عبارتند از:

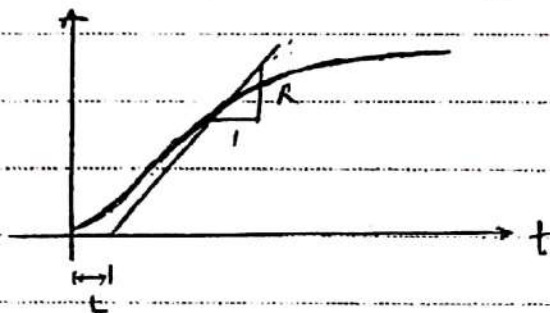
$$ISE = \int_0^{\infty} e^2(t) dt$$

$$ITAE = \int_0^{\infty} t |e(t)| dt$$

$$ITSE = \int_0^{\infty} t e^2(t) dt$$

روش زیگروونیکولز برای تعیین پارامتر کنترلر.
تعیین پارامترهای کنترلر برای یک گروه خاص از سیستم‌های دینامیکی توسط ورودی‌اش
مقدم علم کنترل به نام زیگروونیکولز انجام شده است این گروه از سیستم‌ها
که فرآیندهای صنعتی نامیده می‌شوند دارای این مشخصه‌ی مهم واصل هستند
که عکس‌العمل سیستم مدار باز آنها نسبت به ورودی پله‌ای از مبدأ به تدریج افزایش
یافته و به یک حالت ماندگاری رسد و در آن حالت باقی می‌ماند.
برای تعیین پارامترهای زیگروونیکولز دو روش ارائه شده است.
روش اول - روش عکس‌العمل حالت گذرا

در این روش عکس‌العمل سیستم مدار باز نسبت به ورودی پله‌ای واحد رسم می‌شود
و مطابق شکل زیر دو مقدار R و L اندازه‌گیری می‌شوند. کمیت R عبارت
است از ماکزیمم شیب خط مماس بر منحنی و L عبارت است از زمانی که
خط مماس بر منحنی محور زمان را قطع می‌کند.



با در دست داشتن R و L مقادیر بهینه توسط زیگروونیکولز برای پارامترهای
کنترلر داریم:

	K_c	T_i	T_d
P-action	$(1/R_L)$	∞	0
PI-action	$(0.9/R_L)$	$3.3L$	0
PID-action	$(1.2/R_L)$	$2L$	$0.5L$

لازم به ذکر است که تابع تبدیل کنترل در حالت کلی عبارت است از:

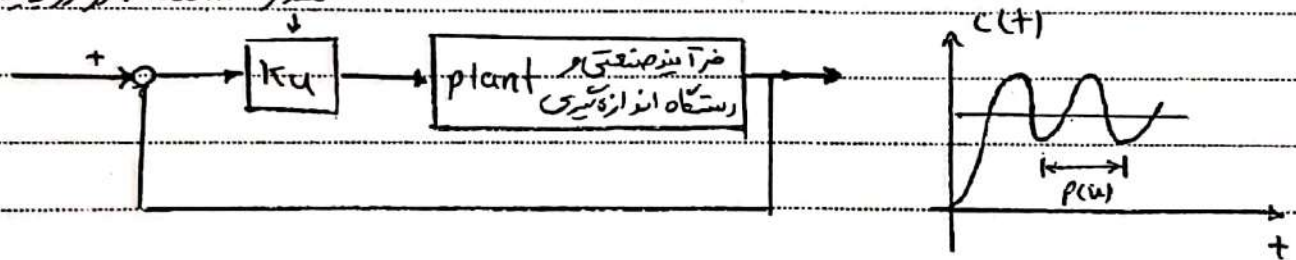
$$G(s) = K_c \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right)$$

روش دوم - روش حساسیت مقدارهای

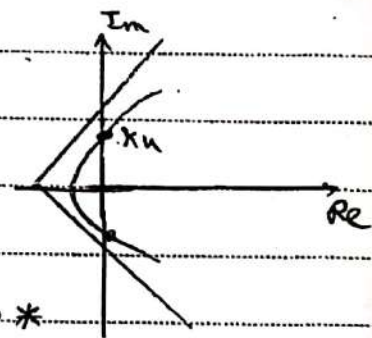
در این روش از اطلاعات مربوط به سیستم مدار بسته تحت تأثیر کنترلر P-action در مرز پایداری استفاده می شود. مطابق شکل زیر در این روش مقدار دو کمیت K_u و P_u اساس تعیین پارامترهای کنترلر قرار می گیرند. عبارت K_u است از مقدار بزرگنمایی مربوط به P-action که سیستم مدار بسته را در مرز پایداری قرار می دهد.

P_u عبارت است از پریود ارتعاشات عکس العمل سیستم مدار بسته در مرز پایداری. جابجاستن K_u و P_u مقدار بهینه پارامترهای کنترلر عبارتند از:

مقدار P-action در مرز پایداری



	K_c	T_i	T_d
P-action	$0.5 K_u$	∞	0
PI-action	$0.45 K_u$	$0.83 P_u$	0
PID-action	$0.4 K_u$	$0.5 P_u$	$0.125 P_u$



* می توانیم به جای K از یک باره برای قطع و وصل کردن سیستم استفاده کنیم

مزیت سیستم حلقه باز ناپایدار:

این سیستم ها سریع به پاسخ مورد نظری می رسند و از این سیستم ها زمانی استفاده می شود که نیاز به پاسخ سریع باشد تا در هواپیماهای جنگنده

«فصل هشتم»

پاسخ و عکس العمل فرکانسی

پاسخ سینوسی سیستم در حالت ماندگار پاسخ فرکانسی سیستم نامیده می شود. در سیستم خطی با پارامترهای ثابت نسبت به زمان اگر ورودی سیستم یک تابع سینوسی باشد، پس از آنکه اثر رفتار گذرا از بین رفت، خروجی سیستم نیز یک تابع سینوسی با همان فرکانس تابع ورودی خواهد بود.

سیستمی همانند شکل زیر با تابع تبدیل $G(s) = \frac{b(s)}{a(s)}$ داریم. می خواهیم عکس العمل سیستم $(y(t))$ را در حالت ماندگار یعنی y_s تعیین نماییم. در این حالت داریم:

$$G(s) = \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

$$u(t) = a \sin \omega t \longrightarrow \boxed{G(s)} \longrightarrow y(t) = b \sin(\omega t - \phi)$$

$$U(s) = \frac{a\omega}{s^2 + \omega^2}$$

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{a\omega B(s)}{(s^2 + \omega^2)A(s)}$$

در این رابطه $A(s)$ بر حسب s و از ریشه های n است (یعنی سیستم دارای n ریشه است). n است). اگر ریشه های $A(s)$ یعنی قطب های سیستم را با p_i نشان دهیم خواهیم داشت:

$$Y(s) = \frac{k_0}{s - j\omega} + \frac{k_0^*}{s + j\omega} + \frac{k_1}{s - p_1} + \frac{k_2}{s - p_2} + \dots + \frac{k_n}{s - p_n}$$

k_0 و k_0^* اعداد مقلد و قمرینه یکدیگرند که برای محاسبه آنها طریقی رابطه ی فوق را در $s - j\omega$ و $s + j\omega$ ضرب کرده و در توابع بدست آمده را به ترتیب در $s = j\omega$ و $s = -j\omega$ محاسبه می کنیم.

$$k_0 = Y(s) (s - j\omega) \Big|_{s=j\omega} = \frac{a\omega G(s)}{(s-j\omega)(s+j\omega)} (s-j\omega) \Big|_{s=j\omega}$$

$$= \frac{a\omega G(s)}{s+j\omega} \Big|_{s=j\omega} = \frac{a\omega G(j\omega)}{2j\omega} = \frac{a G(j\omega)}{2j}$$

$$k_0^* = Y(s) (s + j\omega) \Big|_{s=-j\omega} = \frac{a\omega G(s)}{(s-j\omega)(s+j\omega)} (s+j\omega) \Big|_{s=-j\omega}$$

$$= \frac{a\omega G(s)}{s-j\omega} \Big|_{s=-j\omega} = \frac{a\omega G(-j\omega)}{-2j\omega} = \frac{a G(-j\omega)}{-2j}$$

برای محاسبه تابع خروجی $y(t)$ و از معادله $Y(s)$ لاپلاس معکوس می گیریم:

$$y(t) = k_0 e^{j\omega t} + k_0^* e^{-j\omega t} + k_1 e^{p_1 t} + k_2 e^{p_2 t} + \dots + k_n e^{p_n t}$$

از آنجایی که برای یک سیستم باید ارضای قطب های p_1 تا p_n درست، چپ محور معده من واقع می شوند، به جز دو عبارت اول است راست در حالت ماندگار $(t \rightarrow \infty)$ سایر عبارات فوق حذف می گردند

$$\Rightarrow y_{ss} = k_0 e^{j\omega t} + k_0^* e^{-j\omega t}$$

$$= a \left[\frac{G(j\omega) e^{j\omega t}}{2j} - \frac{G(-j\omega) e^{-j\omega t}}{2j} \right]$$

می دانیم که $G(s)$ یک عدد مختلط و دارای اندازه و فاز است پس داریم:

$$|G(j\omega)| = |G(-j\omega)| = m(\omega) = \sqrt{(\text{Re}[G(j\omega)])^2 + (\text{Im}[G(j\omega)])^2}$$

$$\phi(\omega) = \angle G(j\omega) = \tan^{-1} \left[\frac{\text{Im} G(j\omega)}{\text{Re} G(j\omega)} \right]$$

$$\Rightarrow y_{ss} = a m(\omega) \left[\frac{e^{j(\omega t + \phi(\omega))} - e^{-j(\omega t + \phi(\omega))}}{2j} \right]$$

$$= a m(\omega) \sin(\omega t + \phi(\omega)) = b \sin(\omega t + \phi(\omega))$$

$$m(\omega) = |G(j\omega)| = \frac{b}{a}$$

مثال) برای سیستمی با تابع تبدیل $G(s) = \frac{1}{1+Ts}$ معادلاتی که نشان دهنده تغییرات $M(\omega)$ و $\phi(\omega)$ بر حسب تغییرات ω است را بدست آورید.

$$m(\omega) = |G(j\omega)| = \left| \frac{1}{1+j\omega T} \right| = \frac{1}{\sqrt{1+T^2\omega^2}}$$

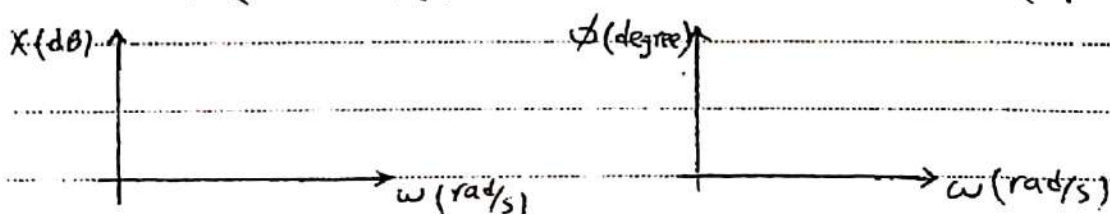
$$\phi(\omega) = \angle G(j\omega) = \angle \left(\frac{1}{1+jT\omega} \right) = \tan^{-1}(-T\omega) = -\tan^{-1}(T\omega)$$

$$\omega: 0 \rightarrow \infty \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega=0 : 1 < 0 \\ \omega=\infty : 0 < -90 \end{array} \right.$$

↑ ↑
اندازه فاز

نمودارهای بُود Bode :

تابع تبدیل سینوسی را در نمودارهای بُود به روشی نمایش می دهند یکی تغییرات دامنه (بر حسب دسی بل) بر فرازش و دیگری زاویه ی فاز (بر حسب درجه) بر فرازش



یک تابع تبدیل در حالت کلی به صورت زیر است :

$$G(s) = K \frac{\prod (s + \tau_i)}{s^m \prod (s + p_i)}$$

از طرفی می دانیم که اگر تابعی به صورت حاصل ضرب چند درآید باشد بهتر است از آن وه گرفته و این کار باعث می شود که ضرب مقادیر به صورت جمع درآید و برای وه ها می توان نمودارها را با Superposition ها را رسم کرد و نتایج را با یکدیگر جمع نمود در واقع یکی از مزیت های اصلی استفاده از نمودار بود این است که ضرب دامنه ها به جمع تبدیل می شود

$$\log(a * b * c * \dots) = \log a + \log b + \log c + \dots$$

حال اگر همین راه را در $\omega = 1$ ضرب کنیم به جای $X(\omega)$ می توان آن را بر حسب (دس بل) dB بیان کرد:

حال به بررسی حالت پایه ای $G(s)$ یا $G(j\omega)$ می پردازیم:
۱. بهره ای k :

$$m(\omega) = 20 \log k \quad \text{یک خط افقی}$$

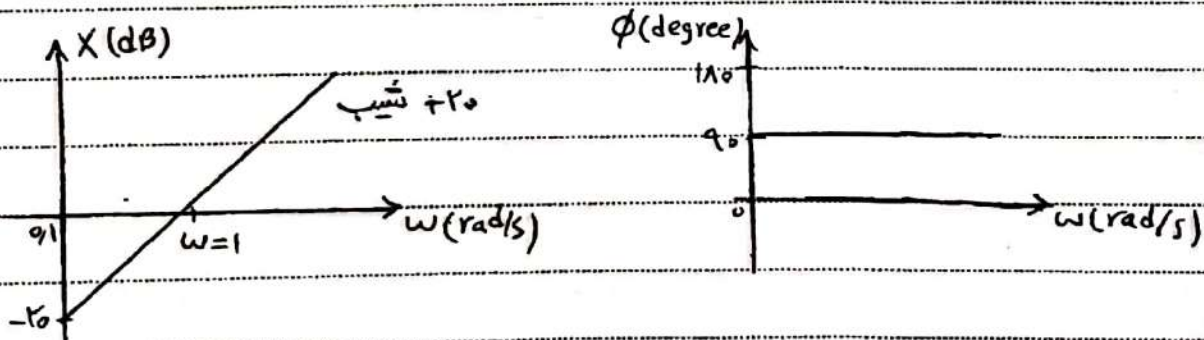
$$\phi(\omega) = 0$$

$$\text{در این حالت} \quad \begin{cases} 0 < k < 1 \rightarrow m(\omega) < 0 \\ k > 1 \rightarrow m(\omega) > 0 \end{cases}$$

۲. عوامل مشتق گیری و انتگرال گیری: $(s)^{\pm 1}$

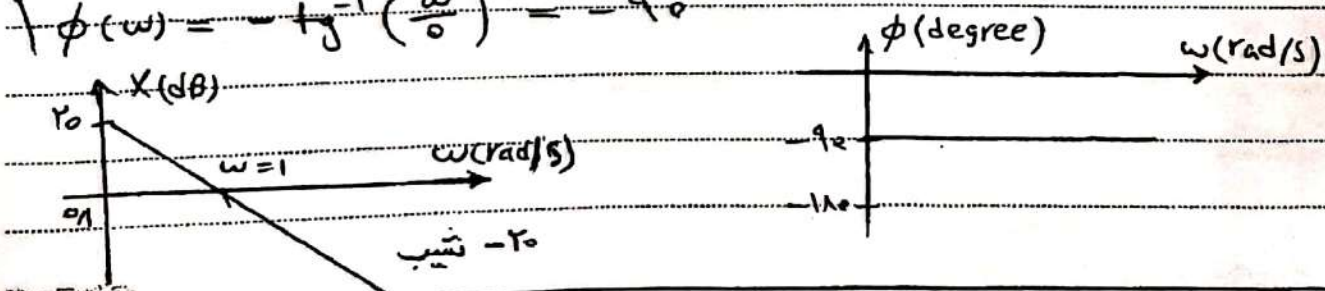
$$\text{If: } G(s) = s = j\omega$$

$$\begin{cases} m(\omega) = 20 \log |G(j\omega)| = 20 \log |j\omega| = 20 \log \omega \\ \phi(\omega) = \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{0}\right) = 90 \end{cases}$$



$$\text{If: } G(s) = \frac{1}{s} = \frac{1}{j\omega}$$

$$\begin{cases} m(\omega) = 20 \log |G(j\omega)| = 20 \log \left| \frac{1}{j\omega} \right| = -20 \log \omega \\ \phi(\omega) = -\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{0}\right) = -90 \end{cases}$$



۳. عامل مرتبه اول: $(1 + j\omega T)^{\pm 1}$

$$\text{If: } G(s) = \frac{1}{1 + TS} = \frac{1}{1 + j\omega T}$$

$$m(\omega) = 20 \log \left| \frac{1}{1 + j\omega T} \right| = -20 \log \sqrt{1 + \omega^2 T^2}$$

$$\phi(\omega) = \angle G(j\omega) = \angle \frac{1}{1 + j\omega T} = -\angle 1 + j\omega T = -\tan^{-1}(\omega T)$$

برای رسم معاینه‌های $m(\omega)$ داریم:

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega T \ll 1 \quad \omega \ll \frac{1}{T} \rightarrow -20 \log \sqrt{1 + \omega^2 T^2} = -20 \log 1 = 0 \text{ dB} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega T \gg 1 \quad \omega \gg \frac{1}{T} \rightarrow -20 \log \sqrt{1 + \omega^2 T^2} = -20 \log \omega T \text{ dB} \end{array} \right.$$

پاسخ این عامل را می‌توان با دو معاینه تقریب زد:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 < \omega < \frac{1}{T} \rightarrow -20 \log \sqrt{1 + \omega^2 T^2} = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega > \frac{1}{T} \rightarrow -20 \log \sqrt{1 + \omega^2 T^2} = -20 \log \omega T \end{array} \right.$$

فرکانس برخورد دو معاینه را فرکانس گوشه‌ای یا فرکانس شکست گویند.

فرکانس گوشه‌ای، منحنی پاسخ فرکانسی را به دو بخش تقسیم می‌کند: ناحیه

فرکانس پایین و ناحیه فرکانس بالا

در این حالت محل برخورد دو معاینه در $\omega = \frac{1}{T}$ روی می‌دهد.

برای زاویه فاز داریم:

$$\rightarrow \omega = 0 \rightarrow \phi = 0$$

$$\rightarrow \omega = \frac{1}{T} \rightarrow \phi = -45$$

$$\rightarrow \omega = T \rightarrow \phi = -90$$

باید به این نکته هم توجه داشت که نمودار $\omega - X$ دقیقاً بر روی معاینه اعتبار

نوارند بلکه دارای خطاهایی می باشند که مقدار این خطا برابر است با:

نقطه شکست $\omega = \frac{1}{T}$: $-20 \log \sqrt{1+1} = -20 \log 2^{\frac{1}{2}} = -10 \log 2 = -3.01 \text{ dB}$
 مقدار خطا
 یک اکتاو بالاتر یا پایین تر $\omega = \frac{1}{2T}$: $-20 \log \sqrt{1+\frac{1}{4}} = -20 \log \frac{\sqrt{5}}{2} = -10 \log 5 - 20 \log 2 = -9.17 \text{ dB}$

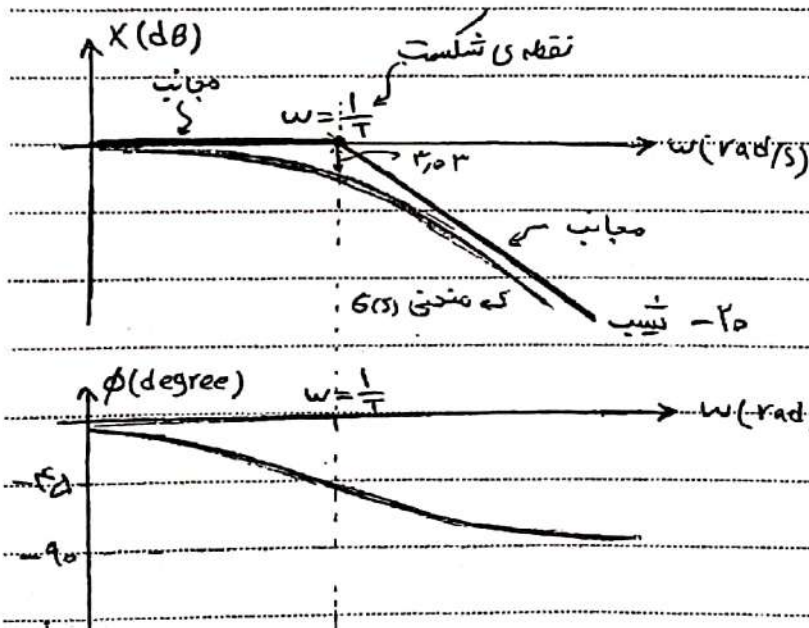
بنابراین در رسم نمودار $X - \omega$ برای تصحیح نمودار پس از رسم مجانبها باید در $\omega = \frac{1}{T}$ و در 3 dB و در $\omega = \frac{1}{2T}$ در هر دو طرف $\omega = \frac{1}{T}$ به اندازه 1 dB نمودار را پایین از مجانبها رسم کنیم

نکته:

بدون توجه به اینکه ω چه مقداری باشد نسبت فرکانسی دهه و اکتاو به صورت زیر تعریف می شوند

یک دهه $\Rightarrow$ فاصلای ω تا 10ω

یک اکتاو $\Rightarrow$ فاصلای ω تا $\frac{\omega}{2}$ | یک اکتاو $\Rightarrow$ فاصلای ω تا 2ω

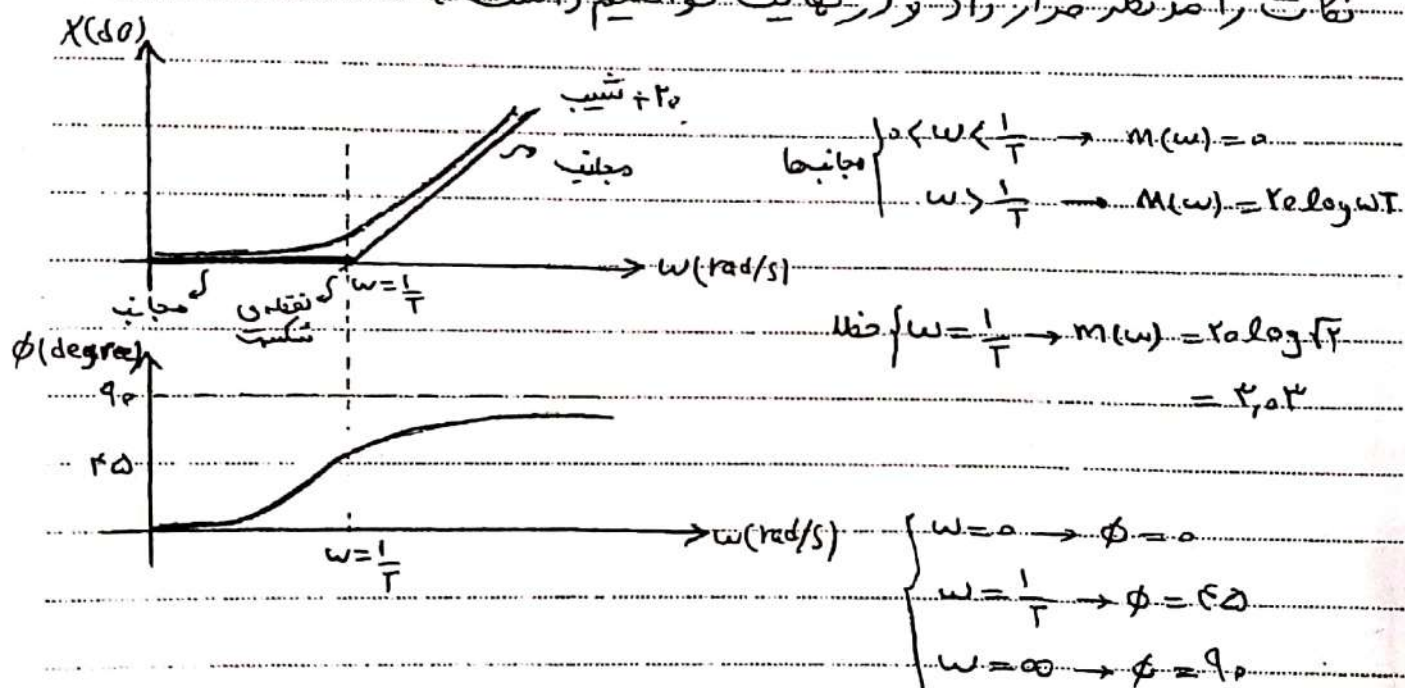


$$\text{If: } G(s) = 1 + Ts = 1 + j\omega T$$

$$m(\omega) = 20 \log |1 + j\omega T| = 20 \log \sqrt{1 + \omega^2 T^2}$$

$$\phi(\omega) = \angle 1 + j\omega T = \tan^{-1}(\omega T)$$

مانند آنچه برای $G(s) = \frac{1}{1 + j\omega T}$ گفته شد، در این حالت نیز می‌توان همان نکات را ملاحظه قرار داد و در نهایت خواهیم داشت:



۴. عامل مرتبه‌ی دوم ± 1

$$\text{If } G(s) = G(j\omega) = \frac{1}{1 + 2\zeta(j\frac{\omega}{\omega_n}) + (j\frac{\omega}{\omega_n})^2}$$

$$m(\omega) = 20 \log \left| \frac{1}{1 + 2\zeta(j\frac{\omega}{\omega_n}) + (j\frac{\omega}{\omega_n})^2} \right| = -20 \log \sqrt{(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2})^2 + (2\zeta\frac{\omega}{\omega_n})^2}$$

$$\phi(\omega) = \angle \frac{1}{(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}) + j2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}} = -\tan^{-1}\left(\frac{2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}\right)$$

برای رسم مجانب‌های $m(\omega)$ داریم:

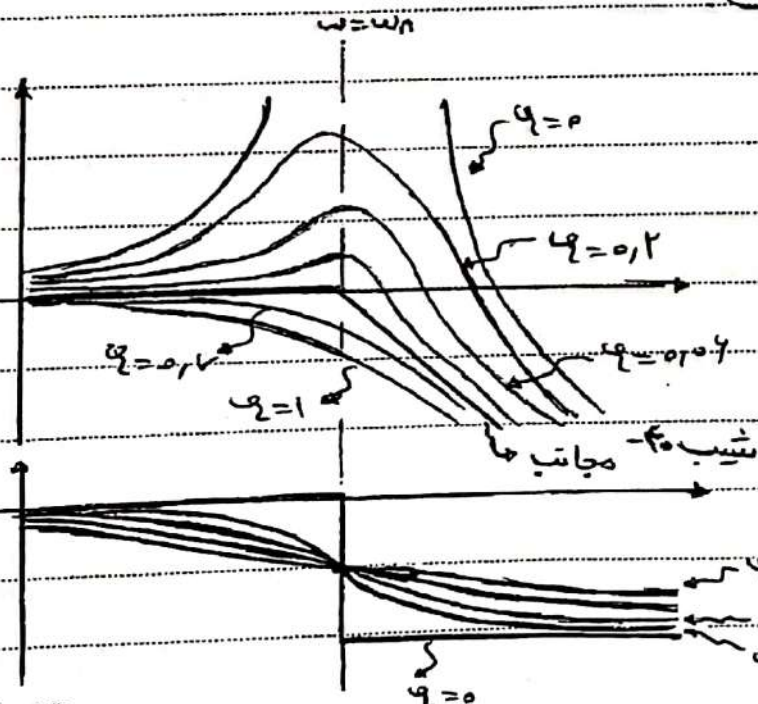
$$\begin{cases} \omega \ll \omega_n \rightarrow -20 \log 1 = 0 \text{ dB} \\ \omega \gg \omega_n \rightarrow -20 \log \frac{\omega^2}{\omega_n^2} = -40 \log \frac{\omega}{\omega_n} \text{ dB} \end{cases}$$

که فرکانس گوشه‌ای در این حالت مقدار ω_n خواهد بود

$$\begin{cases} 0 < \omega < \omega_n \rightarrow -20 \log 1 = 0 \\ \omega > \omega_n \rightarrow -40 \log \frac{\omega}{\omega_n} \end{cases}$$

توجه:

به ازای $q=1$ این عامل مرتبه‌ی دوم را می‌توان به صورت حاصل ضرب دو جمله‌ی مرتبه‌ی اول دارای قطب‌های حقیقی بیان کرد. به ازای $q < 1$ این عامل مرتبه‌ی دوم حاصل ضرب دو عامل مقلط مزدوج است. برای عامل‌های مرتبه‌ی دوم مطابق شکل زیر یک حالت تشدید وجود دارد. نسبت میرایی q اندازه‌ی قله‌ی این تشدید را تعیین می‌کند. واضح است که تقریب با مجانب‌های راست خطا دارد. اندازه‌ی خطا به مقدار q بستگی دارد. این خطا به ازای مقادیر کوچک q بزرگ است.



$$\begin{cases} \omega = 0 \rightarrow \phi = 0 \\ \omega = \omega_n \rightarrow \phi = -90 \\ \omega = \infty \rightarrow \phi = -180 \end{cases}$$

$$\text{If } G(s) = G(j\omega) = 1 + 2\zeta \left(j\frac{\omega}{\omega_n} \right) + \left(j\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2$$

منحنی پاسخ فوق را می توان با عوض کردن علامت منحنی های نگاریم رامنه
و زاویه ی فاز عامل زیر بدست آورد

$$\frac{1}{1 + 2\zeta \left(j\frac{\omega}{\omega_n} \right) + \left(j\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2}$$

فرکانس تشدید ω_r و قله ی تشدید M_r :

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

برای محاسبه ی فرکانس تشدید یا فرکانسی که در آن $|G(j\omega)|$ ماکسیمم می شود
باید از تابع فوق نسبت به ω مشتق گرفته و مشتق را مساوی صفر قرار دهیم
بنابراین داریم:

$$\frac{dM}{d\omega} = 0 \rightarrow \frac{d}{d\omega} \left[\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2} \left[2 \left(-\frac{2\omega}{\omega_n^2} \right) \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right) + \frac{4\zeta}{\omega_n} \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}\right) \right] \left[\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 \right]^{-\frac{3}{2}} = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{4\omega}{\omega_n} \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right) + \frac{8\zeta^2 \omega}{\omega_n^2} = 0$$

$$\Rightarrow 2\zeta^2 = 1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \Rightarrow \frac{\omega^2}{\omega_n^2} = 1 - 2\zeta^2 \Rightarrow \omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}$$

می دانیم که:

$$1 - 2\zeta^2 > 0 \rightarrow 2\zeta^2 < 1 \rightarrow \zeta < 0.707$$

و از طرف دیگر می دانیم که $\zeta > 0$ پس داریم:

$$0 < \zeta < 0.707$$

با جای گذاری ω_r محاسبه شده در $|G(j\omega)|$ مقدار رامنه ی فرکانس تشدید برابر است با

$$M_r = \frac{1}{2\zeta \sqrt{1 - \zeta^2}}$$

Sina Sanedoust

به ازای $0.757 < \omega < 0.757$ فرکانس تشدید ω_r کوچکتر از فرکانس تشدید میرا
 $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$ است و به ازای $\omega > 0.757$ فرکانس تشدید فراتریم.

$$\begin{aligned} & \rightarrow 0 < \omega < 0.757 \Rightarrow M_r = |G(j\omega)| = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} \\ & \rightarrow \omega > 0.757 \Rightarrow M_r = 0 \end{aligned}$$

بامیل ω به سمت صفر M_r به سمت بی نهایت میل می کند یعنی اگر
 یک سیستم رفرکانس طبیعی اش تحریک شود و دامنه ی (بند) صافی نهایت
 می شود.

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\omega} = -\frac{\zeta}{\omega} + j \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\omega}$$

زاویه ی فاز فرکانس
تشدید

نحوه ی رسم نمودارهای بورد:

۱. ابتدا تابع تبدیل $G(j\omega) H(j\omega)$ (که ما فرض کرده ایم $H(j\omega) = 1$ است) را به صورت حاصل ضرب عوامل پایه در می آوریم.
۲. فرکانس گوشه ای مربوط به هر یک از عوامل را مشخص می کنیم.
۳. منحنی های مجانبی لگاریتم دامنه را با شیب های مناسب رسم می کنیم.
۴. می توانیم منحنی های دقیق هر کدام از عوامل پایه ای را رسم کنیم.
۵. حاصل این عوامل پایه را با هم بر روی شکل جمع می کنیم زیرا جمع لگاریتم این عوامل با ضرب آنها هم ارزش است.

$$\log abc = \log a + \log b + \log c$$

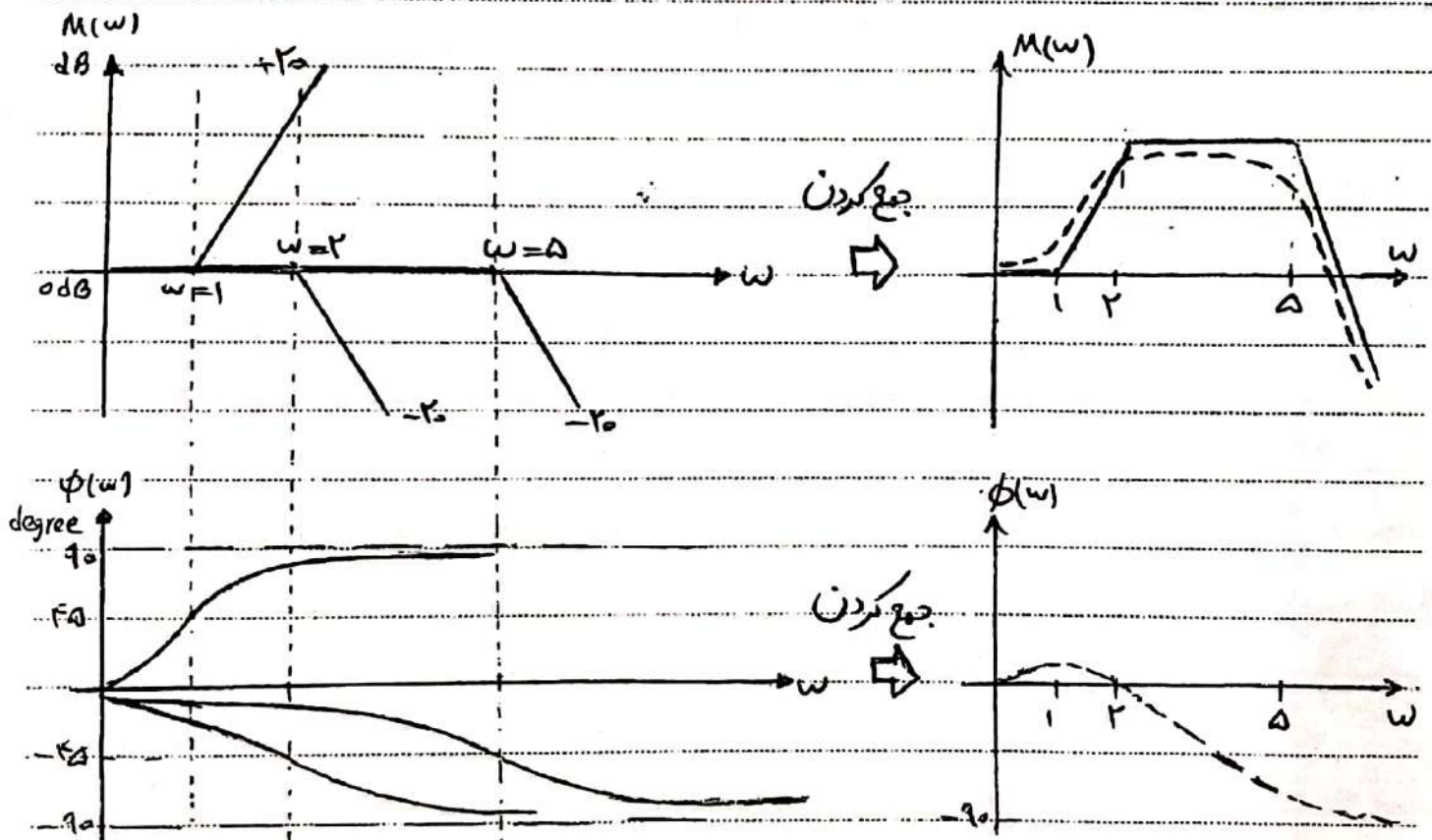
۶. منحنی های فاز را نیز می توانیم با افزودن منحنی های زاویه ای از عوامل پایه رسم نمود.

مثال: نمودار بود تابع تبدیل زیر را بسازید.

$$G(s) = \frac{10(s+1)}{(s+2)(s+5)}$$

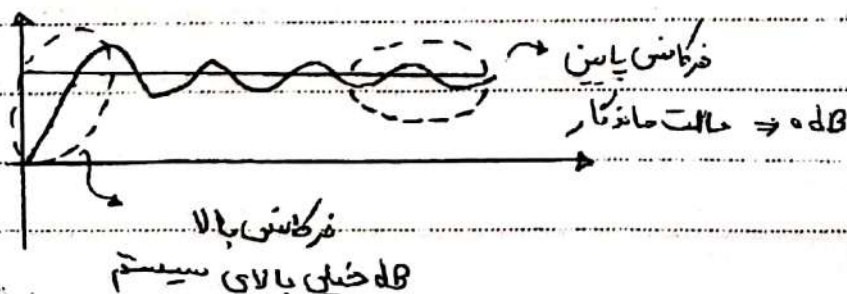
ابتدا تابع تبدیل را به صورت استاندارد و به شکل عوامل پایه درج آوریم:

$$\Rightarrow G(s) = \frac{s+1}{(\frac{1}{2}s+1)(\frac{1}{5}s+1)}$$



نکته:

حالت ماندگار یک پاسخ: همان مقدار 0 dB سیستم است.



مثال) نمودار بورد تابع تبدیل زیر را رسم کنید

$$G(j\omega) = \frac{10(j\omega + 3)}{(j\omega)(j\omega + 2)[(j\omega)^2 + j\omega + 2]}$$

ابتدا تابع تبدیل را به شکل استاندارد و به صورت حاصل ضرب عوامل پائین در صورت آوریم:

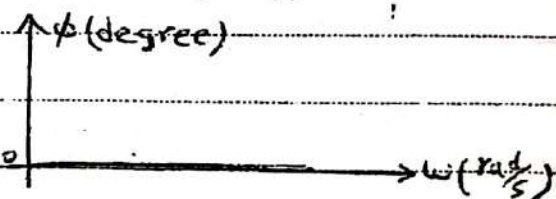
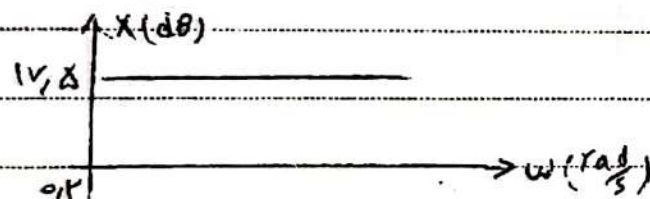
$$G(j\omega) = \frac{10 \times 10 \left(\frac{j\omega}{2} + 1 \right)}{2 \times 2 (j\omega) \left(\frac{j\omega}{2} + 1 \right) \left[\frac{(j\omega)^2}{2} + \frac{j\omega}{2} + 1 \right]}$$

$$= \frac{10 \times 10 \left(\frac{j\omega}{2} + 1 \right)}{(j\omega) \left(\frac{j\omega}{2} + 1 \right) \left[\frac{(j\omega)^2}{2} + \frac{j\omega}{2} + 1 \right]}$$

① $k = 10$

$$20 \log k = 20 \log 10 = 20$$

$$\phi_k = \angle \left(\frac{0}{k} \right) = 0$$



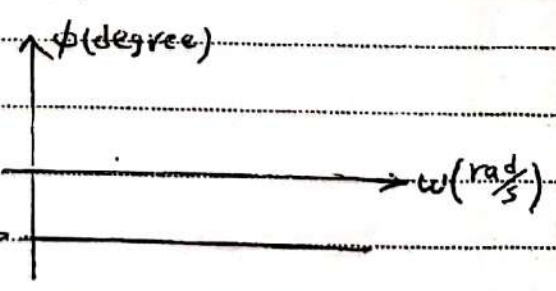
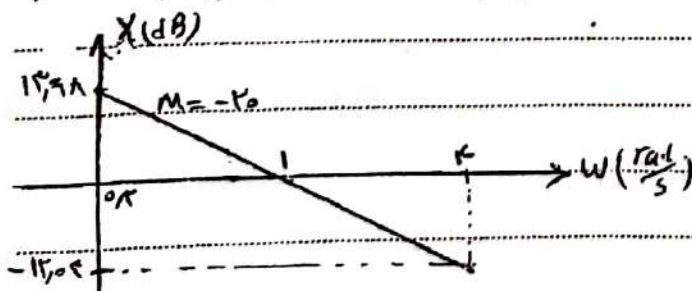
② $(j\omega)^{-1}$

$$20 \log \left| \frac{1}{j\omega} \right| = -20 \log |j\omega| = -20 \log \omega \Rightarrow -20$$

$$j\omega = 0.1 \Rightarrow -20 \log 0.1 = 20$$

$$j\omega = 1 \Rightarrow -20 \log 1 = 0$$

$$\phi = \angle (j\omega)^{-1} = -\angle j\omega = -\angle \left(\frac{j\omega}{1} \right) = -90$$



Page

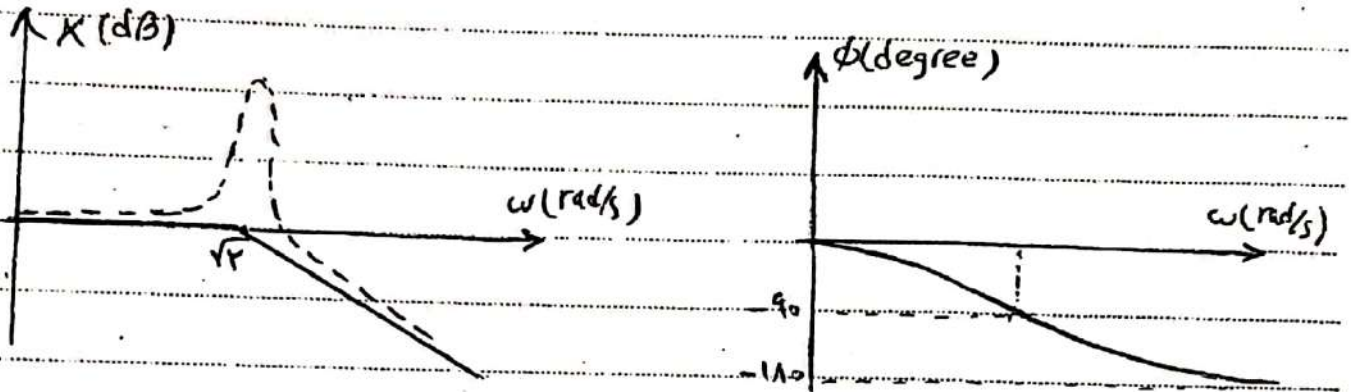
Sina 5D619

$$\textcircled{3} \left(1 + \frac{j\omega}{r} + \frac{(j\omega)^2}{r}\right)^{-1} = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{r}} \frac{j\omega}{\sqrt{r}} + \left(\frac{j\omega}{\sqrt{r}}\right)^2\right)^{-1}$$

$$\begin{cases} r = \frac{1}{\sqrt{r}} \Rightarrow r = \frac{1}{r\sqrt{r}} = 0,3333 \\ \omega = r \end{cases}$$

فرکانس گوشه

از قبل می دانیم: $m = -2$ & $0 < \phi < 180$



$$\textcircled{4} \left(\frac{j\omega}{r} + 1\right)^{-1}$$

$$20 \log \left| \frac{j\omega}{r} + 1 \right|^{-1} = -20 \log \left| \frac{j\omega}{r} + 1 \right| = -20 \log \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{r}\right)^2}$$

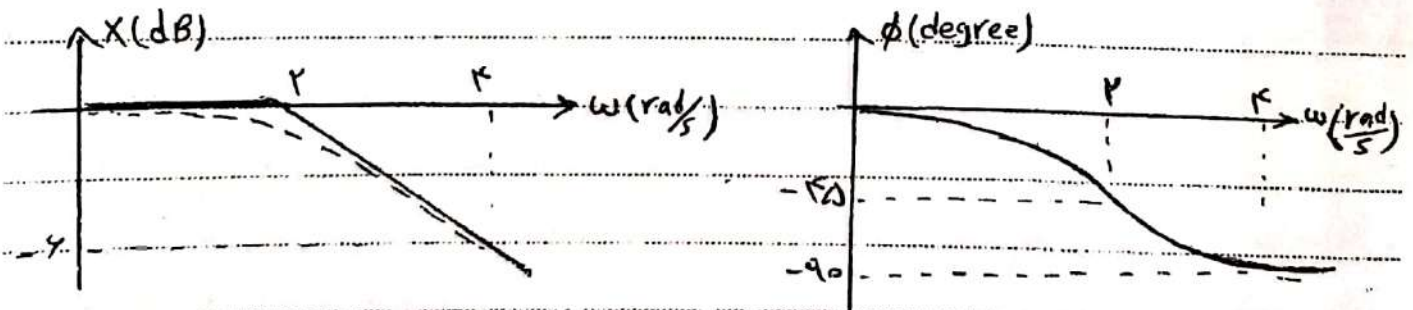
$\omega < r \Rightarrow X = 0$
 $\omega = r \Rightarrow X = -20$
 $\omega > r \Rightarrow X = -40$

فرکانس گوشه $\omega = r$

$$\phi \left(\frac{j\omega}{r} + 1 \right)^{-1} = -\phi \left(\frac{j\omega}{r} + 1 \right) = -\tan^{-1} \left(\frac{\omega}{r} \right)$$

$\omega = 0 \rightarrow \phi = 0$
 $\omega = r \rightarrow \phi = -45$
 $\omega = \infty \rightarrow \phi = -90$

$$\omega = r \rightarrow -20 \log \sqrt{\left(\frac{r}{r}\right)^2} = -20$$



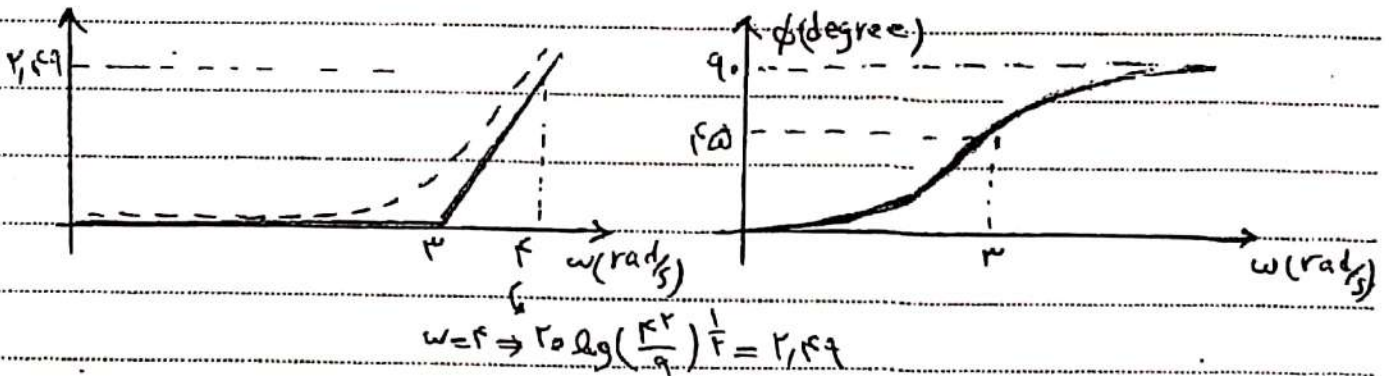
$$\textcircled{5} (1 + j\frac{\omega}{r})$$

$$20 \log \left| 1 + \frac{j\omega}{r} \right| = 20 \log \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{r}\right)^2}$$

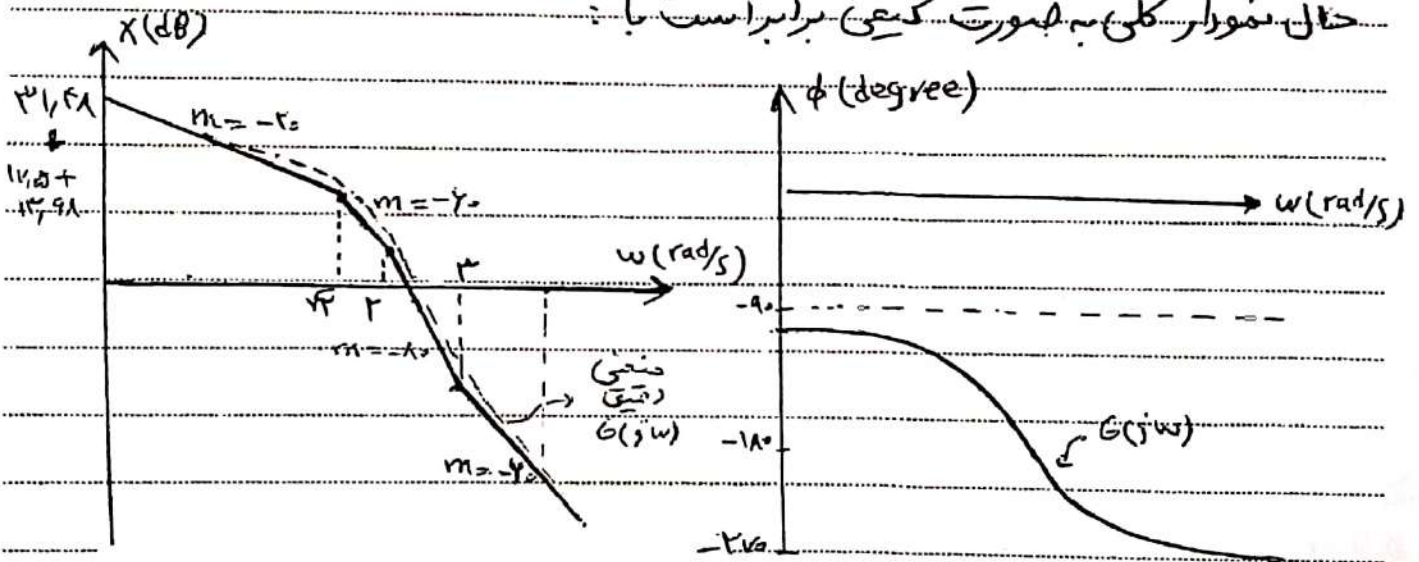
$\omega < r \rightarrow 20 \log \left| 1 + \frac{j\omega}{r} \right| = 0$
 $\omega > r \rightarrow 20 \log \left| 1 + \frac{j\omega}{r} \right| = 20$

$$\phi = \angle 1 + \frac{j\omega}{r} = \angle j^{-1} \left(\frac{\omega}{r} \right)$$

$\begin{matrix} \swarrow \omega=0 \rightarrow \phi=- \\ \rightarrow \omega=r \rightarrow \phi=45 \\ \searrow \omega=\infty \rightarrow \phi=90 \end{matrix}$



حال نمودار کلی به صورت کفنی برابر است با :



سیستم های مینیم فاز و سیستم های غیر مینیم فاز :

توابع تبدیلی که در نیمه ی راست هفتگی S نه قطب دارند و نه لفر توابع تبدیل مینیم فاز هستند و آنهایی که در نیمه ی راست هفتگی S قطب و یا لفر دارند توابع تبدیل غیر مینیم فازند. سیستم هایی با تابع تبدیل مینیم فاز سیستم های مینیم فاز و سیستم هایی با تابع تبدیل غیر مینیم فاز سیستم های غیر مینیم فاز نامیده می شوند.

برای مثال (توابع تبدیل زیر را در نظر بگیرید :

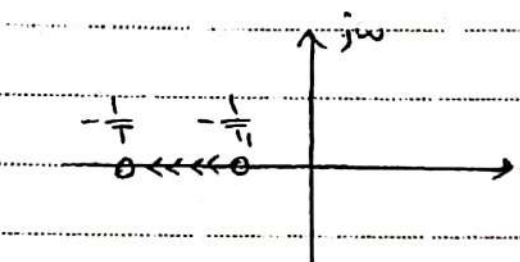
① $G_1(s) = \frac{1+sT}{1+sT_1}$

② $G_2(s) = \frac{1-sT}{1+sT_1}$

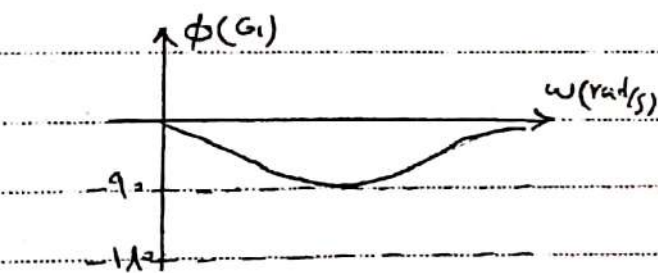
24PCO

Sina SD619

همان طوری که مشاهده می شود تابع تبدیل $\textcircled{\text{II}}$ یک صفر نا پدیدار (صفر درست راست) دارد و یک سیستم غیرمینیم فاز (non-min-phase) می باشد در حالی که تابع تبدیل $\textcircled{\text{I}}$ مینیم فاز (min-phase) است.

تابع تبدیل $\textcircled{\text{I}}$

$$|G_1(j\omega)| = \frac{\sqrt{1+\omega^2 T_1^2}}{\sqrt{1+\omega^2 T_2^2}}$$

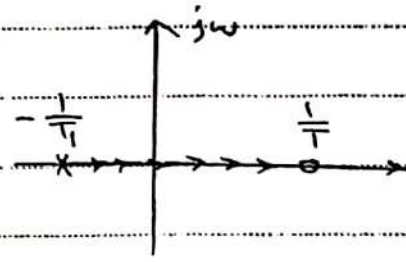


$$\angle G_1(j\omega) = \tan^{-1}(\omega T_1) - \tan^{-1}(\omega T_2)$$

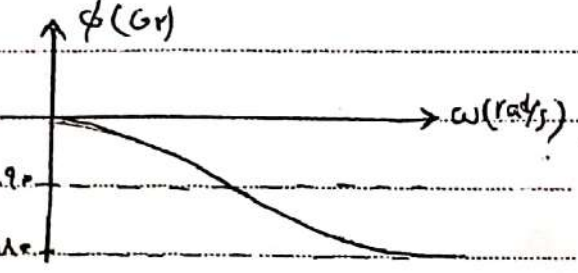
برای سیستم مینیم فاز:

$$\omega \rightarrow \infty : \angle G_1(j\omega) = -90^\circ (p - q)$$

↓
تعداد قطب ها
تعداد صفرها

تابع تبدیل $\textcircled{\text{II}}$

$$|G_2(j\omega)| = \frac{\sqrt{1+\omega^2 T_1^2}}{\sqrt{1+\omega^2 T_2^2}}$$



$$\angle G_2(j\omega) = -\tan^{-1}(\omega T_1) - \tan^{-1}(\omega T_2)$$

برای سیستم غیرمینیم فاز:

$$\omega \rightarrow \infty : \angle G_2(j\omega) = 90^\circ (p + q)$$

↓
تعداد قطب ها
* این حالت، حالت می تواند
تعداد صفرها

نکات:

۱. رفتار یک سیستم مینیم فاز قابل پیش بینی است ولی یک سیستم نامینیم فاز رفتار بونجار شده ای برای پیش بینی در فرکانس ندارد.

۲. در یک سیستم مینیم فاز زاویه ی فاز زمانی که $\omega \rightarrow \infty$ میل کند برابر با $-90^\circ (n-m)$ است.

است که در آن n درجه‌ی چرخش و m درجه‌ی چرخش (ای) صورت می‌باشد ولی در یک سیستم غیرمینیم فاز هرگز نمی‌توان از این نکته استفاده کرد و باید زاویه‌ی فاز را محاسبه نمود.

۳. برخلاف زاویه‌ی فاز، شیب منحنی اندازه هنگامی که $\omega \rightarrow \infty$ میل می‌کند برابر با $\frac{dB}{sec} (n-m) - 20$ است و این ربطی به مینیم فاز و یا غیرمینیم فاز بودن سیستم ندارد و همواره صادق است.

۴. پاسخ سیستم‌های نامینیم فاز به هنگام شروع بسیار نا بهنجار است لذا به دلیل مقیوب بودن منحنی پاسخ در هنگام شروع، پاسخ این گونه سیستم‌ها آهسته است.

۵. نامینیم فاز شدن سیستم معمولاً در دو حالت پیش می‌آید:
الف - اینکه یک یا چند صفر را قطب نامینیم فاز داشته باشیم
ب - اینکه یک حلقه کهارنا پایدار بوجود آمده باشد (یعنی اینکه سیستم حلقه‌های داخلی پایدار داشته باشد).

نمودارهای قطبی (Nykquist):

نمودارهای قطبی (Nykquist) نمودارهایی هستند که تغییرات اندازه بر حسب زاویه‌ی فاز را با تغییر فرکانس نشان می‌دهند.

برای رسم اینگونه نمودارها به جای S مقدار $s = j\omega$ را قرار می‌دهیم ($s = j\omega$) و

تابع تبدیل داده شده را به یک عبارت مقلط تبدیل می‌کنیم و اندازه و فاز را

با تغییر فرکانس از 0 تا ∞ (که 0^- و 0^+ نیز در این بازه قرار دارند)

محاسبه می‌کنیم و نمودار کامل آن را رسم می‌کنیم. البته برای رسم نمودارهای

Nykquist تنها کافی است یک شاخه از منحنی مثلاً 0^- تا 0^+ یا 0 تا 0^- را رسم کنیم و منحنی حاصل را نسبت به محور مختصات بنویسیم تا شکل

کل مورد نظر بدست آید.

نوع:

در نمودارهای قطبی (ناکیویست) زاویه‌ی مثبت در جهت پارسا بزرگتر و زاویه‌ی منفی در جهت پارسا بزرگتر نسبت به محور حقیقی سنجیده می‌شود.

* حال در ابتدا نحوه‌ی رسم برخی از توابع تبدیل مقلد را توضیح داده و در نهایت در مورد قضایای پایداری ناکویست بحث می‌کنیم.
تظیر دیاگرام بود، عوامل تعریف کرده و برای رسم ناکویست از این عوامل کمک می‌گیریم.

$$\text{عامل انتگرال گیر } \frac{1}{j\omega} \text{ و عامل مشتق گیر } j\omega$$

$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{1}{j\omega} = \frac{1}{|j\omega|} \angle -90^\circ = \frac{1}{\omega} \angle -90^\circ$$

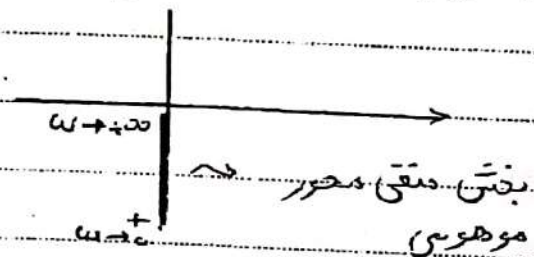
$$= \left| \frac{1}{\sqrt{\omega^2}} \right| \angle -90^\circ = \frac{1}{\omega} \angle -90^\circ$$

همان طوری که مشاهده می‌شود در این حالت زاویه‌ی فاز مستقل از فرکانس ω است و همواره -90° است. این سیستم یک سیستم نوع یک است.

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} G(j\omega)H(j\omega) = \infty \angle -90^\circ$$

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} G(j\omega)H(j\omega) = 0 \angle -90^\circ$$

$$\omega \rightarrow +\infty$$



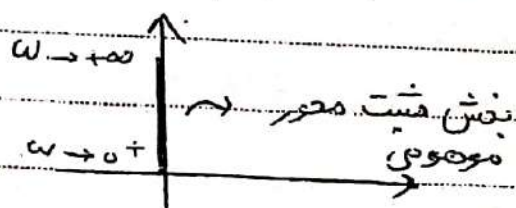
$$G(j\omega)H(j\omega) = j\omega = |j\omega| \angle +90^\circ = \omega \angle 90^\circ$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} G(j\omega)H(j\omega) = 0 \angle 90^\circ$$

$$\omega \rightarrow 0$$

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} G(j\omega)H(j\omega) = \infty \angle 90^\circ$$

$$\omega \rightarrow +\infty$$



Sina Sanedoust

۲. عامل مرتبه اول $\frac{1}{1+j\omega T}$, $1+j\omega T$

$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{1}{1+Tj\omega}$$

$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{1}{\sqrt{1+T^2\omega^2}} \angle -\tan^{-1}(T\omega)$$

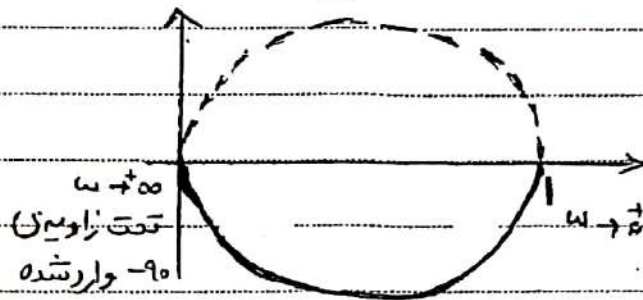
سیستم فوق یک سیستم نوع اول است

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} GH = 1 \angle 0^\circ$$

$$\omega \rightarrow 0$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} GH = 0 \angle -90^\circ$$

$$\omega \rightarrow \infty$$



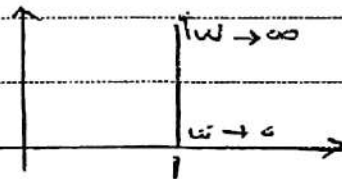
$$G(j\omega)H(j\omega) = 1+j\omega T = \sqrt{1+(T\omega)^2} \angle \tan^{-1} T\omega$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} GH = 1 \angle 0^\circ$$

$$\omega \rightarrow 0$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} GH = \infty \angle 90^\circ$$

$$\omega \rightarrow \infty$$



۳. عامل مرتبه دوم $\frac{1}{1+r^2(\frac{j\omega}{\omega_n}) + (\frac{j\omega}{\omega_n})^2}$

$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{1}{1+r^2\frac{\omega}{\omega_n}j + (\frac{j\omega}{\omega_n})^2} \quad r = \frac{\omega}{\omega_n}$$

$$GH = \frac{1}{1+r^2rj-r^2} = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (r^2r)^2}} \angle -\tan^{-1} \frac{r^2r}{1-r^2}$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} GH = 1 \angle -\tan^{-1} \left(\frac{0}{1-0} \right) = 1 \angle 0^\circ$$

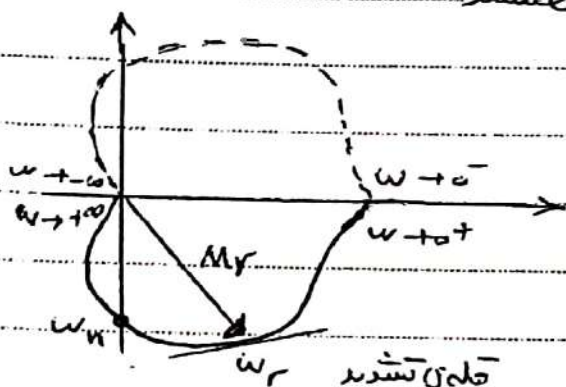
$$\omega \rightarrow 0$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} GH = 0 \angle -\tan^{-1} \left(\frac{r}{1-r^2} \right) = 0 \angle -\underbrace{\tan^{-1}(\infty)}_{+180^\circ} = 0 \angle -180^\circ$$

$$\omega \rightarrow \infty$$

Sina SD619

این گونه سیستم‌ها نیز سیستم‌های نوسانگر هستند.

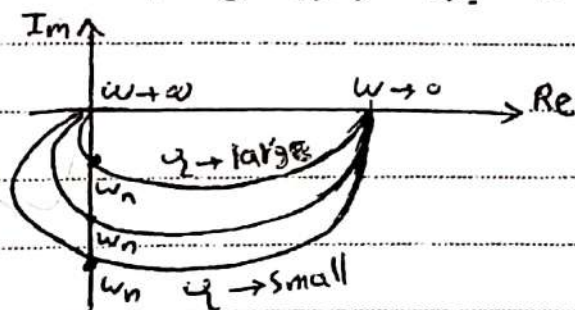


$$\text{حرکت} \left\{ \begin{array}{l} +\infty \rightarrow 0^+ \\ 0^+ \rightarrow 0^- \\ 0^- \rightarrow -\infty \\ -\infty \rightarrow +\infty \end{array} \right.$$

$$\text{Resonance Peak } \omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}$$

نکته:

۱. محل تلاقی محور موهومی با منحنی در نمودار فوق در فرکانس ω_n روی می‌دهد. باید توجه داشت که فاصله‌ی مبدأ تا محل تلاقی (بر روی محور موهومی) برابر با $\frac{1}{2\zeta}$ است که بسته به مقدار ζ نمودار فوق بزرگ و کوچک می‌شود.

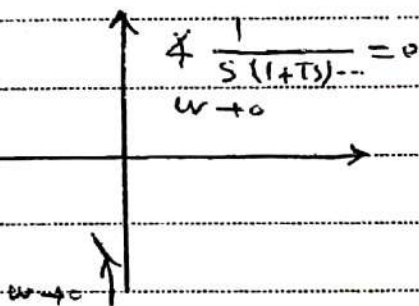


۲. در نمودار نایکویست (قطبی) فرکانس که در آن فاصله از مبدأ حداکثر است، فرکانس تشدیدگونه و با هم نشان داده می‌شود. مقدار این اوج به صورت نسبت اندازه‌ی بردار در فرکانس تشدید به اندازه‌ی بردار در فرکانس صفر بدست می‌آید.

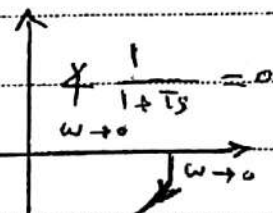
۳. برای ζ های بزرگتر از یک چنانچه می‌دانیم سیستم همانتریک سیستم درجه‌ی اول رفتار می‌کند. لذا همان طور که می‌توان حدس زد نمودار نایکویست نظیر یک سیستم درجه‌ی اول، تبدیل به یک نیم دایره می‌شود.

نکته:

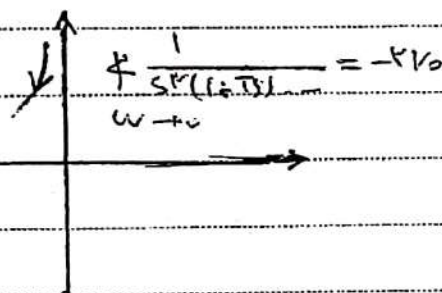
شمای کلی رایگرام های قطبی سیستم های نونی لفر تاسه به صورت زیر می باشد در واقع این شکل ها نشان می دهند که یک سیستم نوع n از کجا شروع می شوند



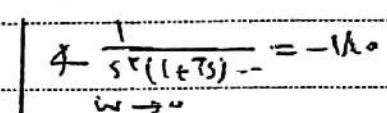
سیستم نوع یک



سیستم نوع لفر



سیستم نوع سه



سیستم نوع دو

توجه شود که برای $n \geq 3$ به صورت پارسا عتگر به ترتیب شکل های فوق تکرار می شوند برای مثال سیستم نوع چهار همانتر سیستم نوع لفر و سیستم نوع پنج همانتر سیستم نوع یک رفتار می کنند

نکته:

اگر تابع تبدیلی به صورت حاصل ضرب فاکتورهای مختلف (عامل های مختلف) باشند یا قابل تجزیه به ضرب حاصل ضرب فاکتورهای مذکور باشند در این صورت شرایط حدی آن با استفاده از شرایط حدی فاکتورهای مختلف آن پوست می آید و نیازی به محاسبات ریاضی کلاسیک نیست

مثال) دیاگرام نایکویست قطب‌های تابع تبدیل زیر را بدست آورید

$$G(s)H(s) = \frac{\omega_n^2}{s(1+Ts)(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}$$

ابتدا مقارصی دهیم: $s = j\omega$

$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)(1+Tj\omega)(1+j2\zeta\frac{\omega}{\omega_n} + (\frac{j\omega}{\omega_n})^2)}$$

$$GH = \left(\frac{1}{\omega} \angle -90^\circ\right) \times \left(\frac{1}{\sqrt{1+T^2\omega^2}} \angle -\tan^{-1}\omega\right) \times$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{(1-\zeta^2)^2 + (\zeta^2)^2}} \angle -\tan^{-1}\left(\frac{\zeta^2}{1-\zeta^2}\right)\right)$$

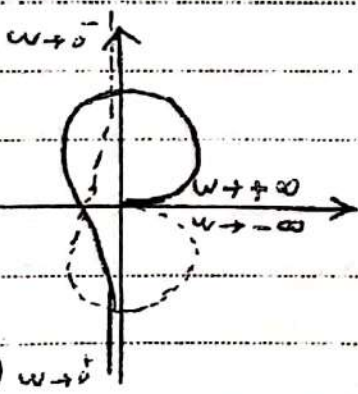
$$\lim_{\omega \rightarrow 0} GH = (\infty \angle -90^\circ)(1 \angle 0^\circ)(1 \angle 0^\circ) = \infty \angle -90^\circ$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} GH = (0 \angle -90^\circ)(0 \angle -90^\circ)(0 \angle -180^\circ) = 0 \angle -270^\circ$$

$\omega \rightarrow \infty$

توجه:

همیشه در چنین جایگزینی‌هایی $\infty \times \infty = 0$ است



از $\omega = 0$ به $\omega = \infty$ در جهت ساعتگرد و یا پادساعتگرد
و به صورت نیم دایره رسم می‌شود که در جلوتر
رسم کامل این شکل توضیح داده می‌شود

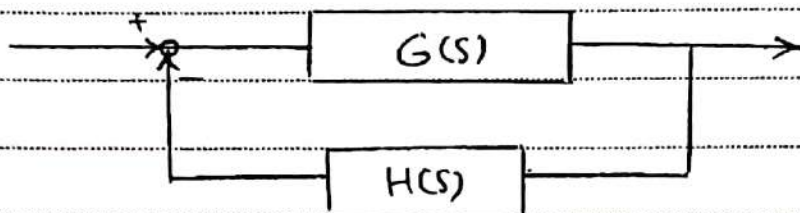
(سیستم بزرگ) $\omega \rightarrow 0$

Nyquist stability theorem

قضیه پایداری نایکویست: اساس تعیین پایداری سیستم‌های مدار بسته کنترلی
قضیه پایداری نایکویست اساس تعیین پایداری سیستم‌های مدار بسته کنترلی
است که در آن از دیاگرام نایکویست سیستم مدار باز برای تحلیل پایداری سیستم
استفاده می‌شود. این قضیه همچنین کرن اصلی طراحی سیستم مدار بسته با استفاده

از روش عکس العمل فرکانسی نیز به شمار می آید.

مداری همانند شکل زیر در نظر بگیرید که دارای تابع تبدیل به صورت زیر است:



فرض: $H(s) = 1$

$$\frac{c}{r} = \frac{G(s)}{1 + H(s)G(s)}$$

معادله مشخصه سیستم: $F(s) = 1 + H(s)G(s)$

اگر تابع تبدیل حلقه باز را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$G(s)H(s) \stackrel{H(s)=1}{=} \frac{B(s)}{A(s)}$$

$B(s)$ ← صفرهای تابع تبدیل حلقه باز

$A(s)$ ← قطبهای تابع تبدیل حلقه باز

$$\Rightarrow F(s) = \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)} = 1 + \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{A(s) + B(s)}{A(s)}$$

تابع تبدیل حلقه بسته به صورت زیر در می آید:

$$G_a = \frac{c}{r} = \frac{B/A}{1 + B/A} = \frac{B(s)}{A(s) + B(s)}$$

از معادله مشخصه (معادله مشخصه) تابع تبدیل حلقه باز و تابع تبدیل حلقه بسته داریم:

۱. قطبهای معادله مشخصه $F(s)$ با قطبهای تابع تبدیل حلقه باز GH یکی

است. (هر دو $A(s)$)

۲. صفرهای معادله مشخصه $F(s)$ با قطبهای تابع تبدیل حلقه بسته G_a یکی

است. (هر دو $A(s) + B(s)$)

حال با استفاده از معادله مشخصه سیستم کنترلی پایداری سیستم با استفاده

پس داریم :

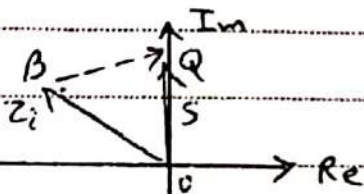
$$\angle F(j\omega) = -\pi$$

برای قطب پایدار P

$$\angle F(j\omega) = +\pi$$

برای قطب ناپایدار P

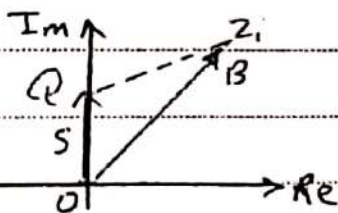
حال این بار معادله مشخصه ای به صورت $F(s) = s - z_i$ در نظر بگیریم z_i عدد مقلط است) من خواهیم تغییرات زاویه ای تابع $F(s)$ را وقتی s از $-\infty$ تا $+\infty$ روی محور موهومی و حقیقی مقلط حرکت می کند را مناسب کنیم.



$$\overline{OB} = z_i$$

$$\overline{OQ} = s = j\omega$$

(حالت LHP)



$$\overline{OB} = z_i$$

$$\overline{OQ} = s = j\omega$$

(حالت RHP)

برای حالت LHP :

$$BQ = s - z_i$$

$$\angle BQ = +\pi \Rightarrow \angle F(s) = \angle BQ = +\pi$$

$$\omega : -\infty \rightarrow +\infty$$

برای حالت RHP :

$$BQ = s - z_i$$

$$\angle BQ = -\pi \Rightarrow \angle F(s) = \angle BQ = -\pi$$

$$\omega : -\infty \rightarrow +\infty$$

پس داریم :

$$\angle F(j\omega) = +\pi$$

برای صفرهای پایدار Z

$$\angle F(j\omega) = -\pi$$

برای صفرهای ناپایدار Z

حال فرض کنید معادله‌ای مشخصه دارای n قطب و m صفر باشد آن‌گاه:

$$G(s)H(s) = \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{j=1}^n (s - p_j)} = \frac{B(s)}{A(s)} \quad n > m$$

$$F(s) = 1 + G(s)H(s) = 1 + \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{A(s) + B(s)}{A(s)} = 0$$

$$\Rightarrow F(s) = \frac{\prod_{i=1}^n (s - z_i)}{\prod_{j=1}^n (s - p_j)} \Rightarrow \text{مشاهده می شود که صورت و مخرج هر دو از رسته‌ی } n \text{ (قطب - صفر) هستند}$$

فرض کنید تابع $F(s)$ دارای تعداد z عدد صفر و p عدد قطب در نیم صفحه سمت راست (RHP) و در نتیجه $(n-z)$ عدد صفر و $(n-p)$ عدد قطب در نیم صفحه سمت چپ (LHP) باشد حال اگر نقطه‌ای q روی محور موهومی از $+\infty$ تغییر کند و بخواهیم تغییر فاز $F(s)$ را بدست آوریم کافی است تغییر فاز صورت و مخرج $F(s)$ را به ازای قطب‌ها و صفرهای که در سمت راست و چپ صفحه قرار دارند تعیین کرده و نتیجه را مناسب نماییم.

$$\left\{ \begin{array}{l} (n-z) \times \pi : \text{تغییر فاز مثبت } F(s) \text{ در اثر وجود } (n-z) \text{ عدد صفر در LHP} \\ p \times \pi : \text{تغییر فاز مثبت } F(s) \text{ در اثر وجود } p \text{ عدد قطب در RHP} \\ z \times (-\pi) : \text{تغییر فاز منفی } F(s) \text{ در اثر وجود } z \text{ عدد صفر در RHP} \\ (n-p) \times (-\pi) : \text{تغییر فاز منفی } F(s) \text{ در اثر وجود } (n-p) \text{ عدد قطب در LHP} \end{array} \right.$$

$$F(s) : \text{تغییر فاز مثبت } 2(p-z)\pi$$

با تقسیم طرفین معادله‌ی فوق بر 2π مقدار دوران تابع $F(s)$ نسبت به مبدأ صفر حاصل می شود یعنی:

$$\text{تعداد دوران خلاف جهت عقربه‌های ساعت } F(s) \text{ نسبت به مبدأ } N = p - z$$

$$\left\{ \begin{array}{l} p : \text{تعداد قطب‌های ناپایدار} = \text{تعداد قطب‌های ناپایدار تابع تبدیل حلقه باز (قطب در RHP)} \\ z : \text{تعداد صفرهای ناپایدار} = \text{تعداد قطب‌های ناپایدار تابع تبدیل حلقه بسته (قطب در RHP)} \end{array} \right.$$

از طرفی می دانیم که سیستم مدار بسته زمانی پایدار است که تمامی قطب های مدار بسته در سمت چپ محور موهومی یعنی در LHP باشد (مثلاً در پایداری روات این موضوع را بررسی کردیم) پس برای اینکه سیستم مدار بسته پایدار باشد (شرط پایداری سیستم مدار بسته) با $z=0$ باشد در نتیجه خواهیم داشت:

$$N = P$$

از طرفی قطب های تابع تبدیل حلقه بسته فقط و فقط زمانی پایدار خواهند بود که در صورت پایدار بودن P تا قطب تابع تبدیل حلقه باز نمودار قطبی (ناکویست) N دور در جهت مثبت مثلثاتی حول مبدا (نقطه ی صفر) بزنند. $(N+)$

$$(N+) = P$$

نکته:

عیب این روش این است که در این روش با $F(s)$ مشخص باشد در حالی که در سیستم های عملی ما هنوز کمتر سیستم را طراح می تکریم تا بتوانیم $F(s)$ را از داخل تابع تبدیل حلقه بسته بدست آوریم. به همین خاطر از نگاشت استفاده می کنیم.

طبق تعریف نگاشت انتقالی د

$$z = w$$

$$f(z) = 1 + z = 1 + w$$

بنابراین به جای اینکه $F(s)$ را محاسبه کنیم کافی است از تابع تبدیل حلقه باز استفاده کنیم:

$$\frac{c}{r} = \frac{G(s)}{1 + G(s)}$$

$$F(s) = 1 + G(s) \Rightarrow G(s) = F(s) - 1$$

تابع تبدیل حلقه باز

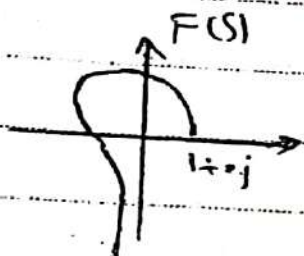
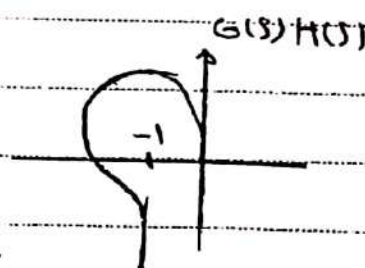
پس $F(s)$ که با $z=0$ حول صفر بچرخد به واسطه 1 انتقال یافته و نمودار ناکویست با $z=0$ حول 1 بچرخد. پس شرط پایداری به صورت زیر تعریف

PAPCO

Sina SD619

تکرار :

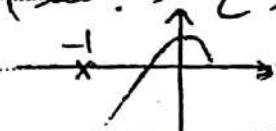
$$N^+ = P - Z$$

داشت
→

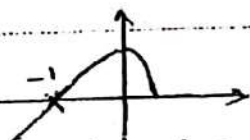
N : مقدار دورهای نمودار نایکویست تابع تبدیل حلقه باز حول نقطه $z = 0 \pm j$
 P : مقدار قطب‌های با قسمت حقیقی مثبت در $G(s)H(s)$ یا مقدار قطب‌های نایب‌دار تابع تبدیل حلقه باز
 Z : مقدار ریشه‌های معادله‌ی مشخصه با قسمت حقیقی مثبت یا مقدار قطب‌های نایب‌دار تابع تبدیل حلقه بسته

خلاصه قضیه پایداری نایکویست :

۱. یک سیستم مدار بسته پایدار است اگر نقطه -1 در سمت چپ نمودار نایکویست سیستم مدار باز واقع شده باشد (۱- در خارج از نمودار نایکویست واقع نشده باشد)



۲. اگر نمودار نایکویست حلقه باز روی -1 باشد سیستم در مرز پایداری قرار دارد.



۳. اگر ۱- در سمت راست نمودار نایکویست باشد آنگاه سیستم ناپایدار است (۱- در داخل نمودار نایکویست واقع شود)

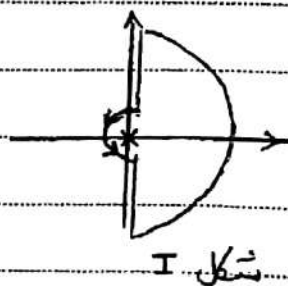
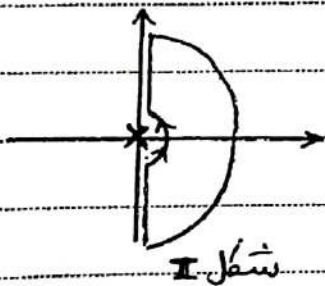
با استفاده از این حالات مفاهیمی به نام حوض و حبره بیان گردیده اند که جلوتر توضیحاتی در مورد آنها داده می شود.

بایستی توجه داشت که حالات ۱، ۲ همواره برقرارند ولی حالت ۳ مشروط بر اینکه $P=0$ باشد برقرار است. و در صورتی که $P \neq 0$ باشد بایستی مقدار دور زدن های نمودار نایکو بیست حول نقطه ی ۱- بررسی شود.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{دور زدن در خلاف جهت عقربه های ساعت} \Rightarrow N^+ = P - Z \\ \text{دور زدن در جهت حرکت عقربه های ساعت} \Rightarrow N^- = Z - P \end{array} \right.$$

نکته:

اگر تابع تبدیل حلقه باز دارای قطب در حید باشد آنگاه منی داریم که این قطب در RHP یا LHP قرار دارد به همین خاطر در هنگام رسم نمودار در صفحه s (در حوالی نقطه ی صفر یک اندنا (نیم دایره ای) ایجاری کنیم که نقطه ی صفر را در جهت ساعتگرد و یا پارساعتگرد دور بزنند. در هر یک از این حالات تابع تحت نگاشت باید دیگر متفاوت خواهند بود. اگر نیم دایره ی حوالی نقطه ی صفر، آن را در جهت پارساعتگرد دور بزنند همانند شکل I، آنگاه چون قطب مزبور در LHP قرار گرفته است تغییری در مقدار P (مربوط به مقدار قطب های مدار باز است که در RHP قرار دارند) داده منی شود و $N = Z - P$ همچنان برقرار است. اگر نیم دایره ی کوچک اطراف $s=0$ در جهت ساعتگرد $s=0$ را دور بزنند همانند شکل II، قطب مدار باز مزبور را بایستی به عنوان یکی از قطب های RHP در نظر گرفت ولی نکته ی مهم این است که نگاشت حاصل به گونه ای است که N نیز یکی زیاری شود و در واقع تغییری در $N = Z - P$ روی منی دهد.

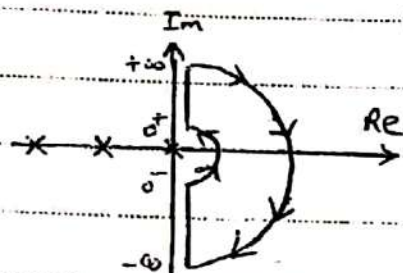


برای درک بهتر نکته ی فوق آن را با مثال زیر توضیح می دهیم. اگر $G(s)H(s)$ در مخرج s^n داشته باشد در حید قطب دارد که روی محور منی می افتد سوال این است که آیا این نوع قطب را در داخل منحنی در نظر بگیریم یا

خارج آن؟

فرض کنید:

$$G(s) = \frac{K}{s(1+T_1s)(1+T_2s)} = \frac{K}{(j\omega)(1+T_1j\omega)(1+T_2j\omega)}$$

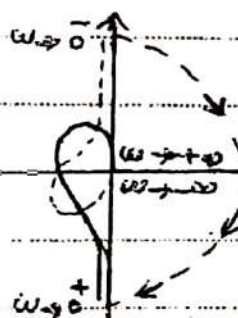
نمودار فوق در صفحه $Re-Im$ یا $F(s)$ برابر است با:«حرکت حول $s=0$ پادساعتگرد»

حال اگر نمودار نایکویست آن را رسم کنیم:

$$\left(\frac{1}{\omega} \angle -90^\circ\right) \left(\frac{1}{\sqrt{1+(T_1\omega)^2}} \angle -\tan^{-1}(T_1\omega)\right) \left(\frac{1}{\sqrt{1+(T_2\omega)^2}} \angle -\tan^{-1}(T_2\omega)\right)$$

$$\omega \rightarrow 0 \Rightarrow (\infty \angle -90^\circ)(1 \angle 0^\circ)(1 \angle 0^\circ) = \infty \angle -90^\circ$$

$$\omega \rightarrow \infty \Rightarrow (0 \angle -90^\circ)(0 \angle -90^\circ)(0 \angle -90^\circ) = 0 \angle -270^\circ$$

«حرکت از 0^- به 0^+ نیم دایره ای با شعاع

بی نهایت در جهت ساعتگرد»

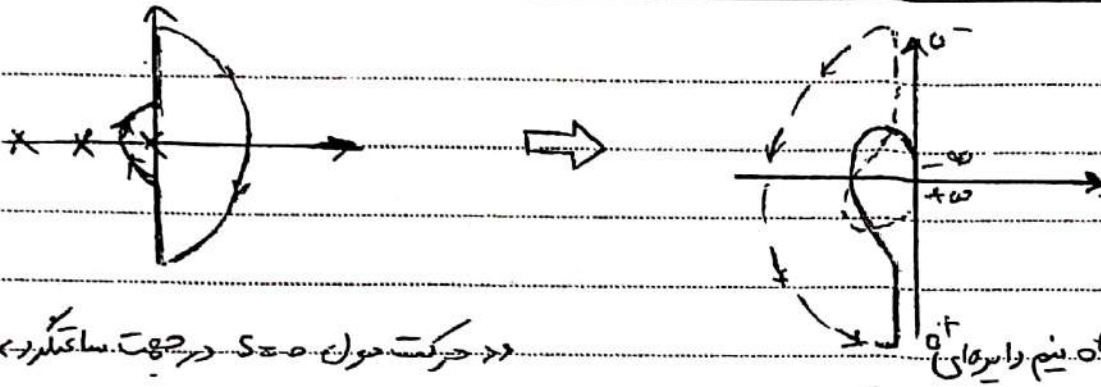
به طور کلی اگر قطب واقع در مبدأ یا محور بیض را در خارج منحنی فرض کنیم (همانند

شکل فوق) یا به عبارتی حرکت در صفحه s حول قطب واقع در مبدأ در جهت پادساعتگردباشد به ازای هر قطب، یک نیم دایره با شعاع ∞ در جهت ساعتگرد (از 0^- به 0^+) خواهیم داشت. این نکته بسیار مهم و در تکمیل منحنی نایکویست بسیار

بایستی از آن استفاده نمود.

حال اگر قطب واقع در مبدأ داخل منحنی باشد یا به عبارتی حرکت در صفحه s حولقطب واقع در مبدأ در جهت ساعتگرد باشد آنگاه در صفحه GH حرکت از 0^- به 0^+

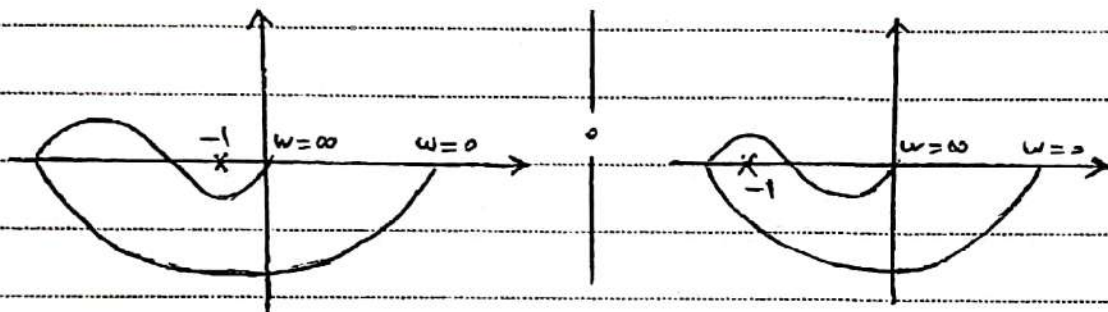
در جهت پادساعتگرد است.



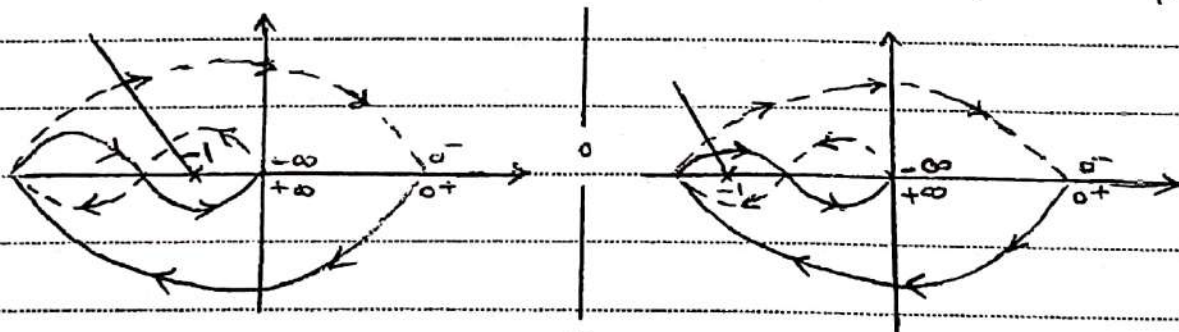
«حرکت حول $s=0$ در جهت ساعتگرد»

«حرکت از $0+$ به $0+$ نیم دایره‌ای
با شعاع بی‌نهایت در جهت پادساعتگرد»

مثال) گواهی از شکل‌های زیر باید اراست و چند قطب نباید دارد



برای بررسی پایداری ابتدا باید آن را کامل نمود و این کار را با نقطه چین نشان
داریم



$$P=0$$

$$N=0$$

$$N^+ = P - Z \Rightarrow Z=0$$

$$P=0$$

$$N^+ = -2$$

$$N^+ = P - Z \Rightarrow -2 = 0 - Z \Rightarrow Z=2$$

قطب نباید در حلقه بسته قرار

۲ قطب نباید در حلقه بسته قرار

نکته:

۱. یک روش برای محاسبی مقدار دوران های حول نقطه ۱-، ۰، ۱ خارج یک نیم خط مستقیم از نقطه ۱- به سمت شعاع ۰۰ (در صورت وجود) و شمارش جبری (با در نظر گرفتن جهت فلش ها) فلشهاست یعنی از نقطه ۱- یک نیم خط به سمت شعاع ۰۰ خارج می کنیم در محل تلاقی های این نیم خط ها با منحنی فلش ها را می شماریم. فلش ها در جهت پاد ساعتگرد را مثبت و فلش ها با جهت ساعتگرد را با علامت منفی منظور می کنیم در نهایت جمع جبری (علامتی) فلش ها، مقدار و علامتی دارد که نشان می دهد N چند بار و در چه جهتی باید اسرادر بزنند.

۲. مقدار را می رساند و مرکز متقی نمی شود اگر در محاسبی ۲ به یک عدد منفی رسیدیم حتماً دچار اشتباه شده ایم. (زمانی که N ساعتگرد تعریف شود $(N+)$).

مثال) پایداری سیستم زیر را به ازای k های مختلف بدست آورید.

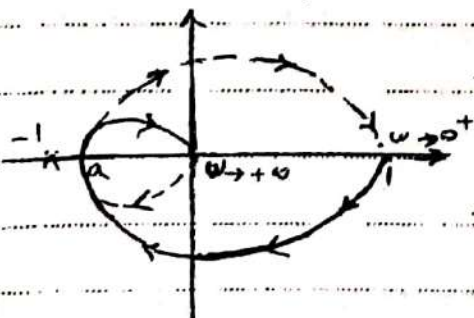
$$G(s) = \frac{k}{(1+Ts)(5s^2+2\zeta s+1)} = \frac{k}{(1+Tj\omega)(1-\omega^2+2\zeta\omega j)}$$

با فرض $k=1$ نمودار نایکو بسط را رسم می کنیم:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1+(T\omega)^2}} \angle -\tan^{-1}(T\omega) \right) \left(\frac{1}{\sqrt{(1-\omega^2)^2+(2\zeta\omega)^2}} \angle -\tan^{-1}\left(\frac{2\zeta\omega}{1-\omega^2}\right) \right)$$

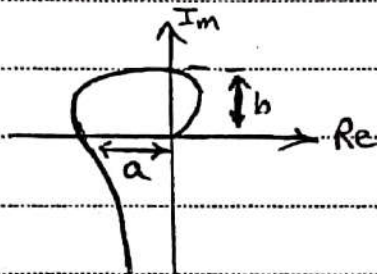
$$\omega \rightarrow 0 \Rightarrow (1 \angle 0)(1 \angle 0) = 1 \angle 0$$

$$\omega \rightarrow \infty \Rightarrow (0 \angle -90)(0 \angle -180) = 0 \angle -270$$



نکته:

برای محاسبه ی محل برخورد محور موهومی و حقیقی با نمودار نایکویست از فرمول زیر استفاده می کنیم.



$$\text{Im} [G(j\omega_x) \cdot H(j\omega_x)] = 0 \Rightarrow \omega_x \text{ معلوم}$$

$$a = \text{Re} [G(j\omega_x) \cdot H(j\omega_x)]$$

$$\text{Re} [G(j\omega_y) \cdot H(j\omega_y)] = 0 \Rightarrow \omega_y \text{ معلوم}$$

$$b = \text{Im} [G(j\omega_y) \cdot H(j\omega_y)]$$

برای مثال برای محاسبه ی نقطه ی a داریم:

$$\frac{1}{(1+jTw)[(1-\omega^2)+(2\xi\omega j)]} \times \frac{(1-jTw)}{(1-jTw)} \times \frac{(1-\omega^2)-(2\xi\omega j)}{(1-\omega^2)-(2\xi\omega j)}$$

رابطه ی فوق را بر حسب قسمت موهومی و حقیقی مرتب کرده و اگر مثلاً به T و ξ مقدار داده شود که $a = 0$ شود به ازای مقادیر مختلف ω (یا ω یا ξ) سیستم را بررسی می کنیم.

- | | | |
|---------------------------------|---------------|--|
| ① $-\infty < G(j\omega) < -0.5$ | $\rightarrow$ | سیستم پایدار است و دور می زند |
| ② $-0.5 < G(j\omega) < 0$ | $\rightarrow$ | سیستم ناپایدار است، ۲ بار دور می زند
$N^+ = -2$ & $P = 0$ |
| ③ $0 < G(j\omega) < 1$ | $\rightarrow$ | سیستم ناپایدار است، ۱ بار دور می زند
$N^+ = 1$ & $P = 0$ |
| ④ $1 < G(j\omega) < \infty$ | $\rightarrow$ | سیستم پایدار است و دور می زند |

حال برای بدست آوردن محدوده پایداری k داریم:

$$1 + k G(j\omega) = 0 \rightarrow G(j\omega) = -\frac{1}{k}$$

$$\textcircled{I} \quad -\infty < -\frac{1}{k} < -0.5 \Rightarrow 0 < k < 2 \quad \text{پایدار}$$

$$\textcircled{II} \quad -0.5 < -\frac{1}{k} < 0^- \Rightarrow 2 < k < \infty \quad \text{ناپایدار}$$

$$\textcircled{III} \quad 0^+ < -\frac{1}{k} < 1 \Rightarrow -\infty < k < -1 \quad \text{ناپایدار}$$

$$\textcircled{IV} \quad 1 < -\frac{1}{k} < \infty \Rightarrow -1 < k < \infty \quad \text{پایدار}$$

حال با اشتراک مقادیر k داریم:

$$\underbrace{-\infty < k < -1}_{\text{ناپایدار}} \underbrace{-1 < k < 0}_{\text{پایدار}} \underbrace{0 < k < 2}_{\text{پایدار}} \underbrace{2 < k < \infty}_{\text{ناپایدار}}$$

در نتیجه سیستم به ازای $-1 < k < 2$ پایدار است.

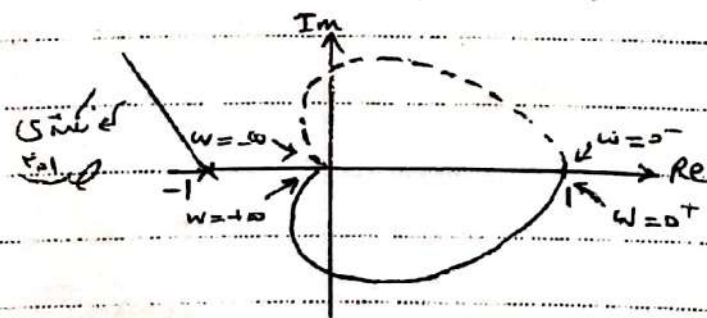
مثال) سیستم حلقه بسته ای با تابع تبدیل حلقه باز زیر را در نظر گرفته و پایداری آن را بررسی کنید.

$$G(s)H(s) = \frac{k}{(1+T_1s)(1+T_2s)}$$

$$G(j\omega)H(j\omega) = \left(\frac{1}{\sqrt{1+(T_1\omega)^2}} \angle -\tan^{-1}(T_1\omega) \right) \left(\frac{1}{\sqrt{1+(T_2\omega)^2}} \angle -\tan^{-1}(T_2\omega) \right)$$

$$\omega \rightarrow 0 \Rightarrow (1 \angle 0)(1 \angle 0) = 1 \angle 0$$

$$\omega \rightarrow \infty \Rightarrow (0 \angle -90)(0 \angle -90) = 0 \angle -180$$



$$\left. \begin{array}{l} P=0 \\ N=0 \end{array} \right\} \Rightarrow Z=0$$

این سیستم به ازای تمام مقادیر مثبت

k, T_1, T_2 پایدار است.

مثال) سیستمی با تابع تبدیل حلقه باز زیر را در نظر بگیرید. پایداری سیستم را به ازای K های کوچک و بزرگ بررسی کنید.

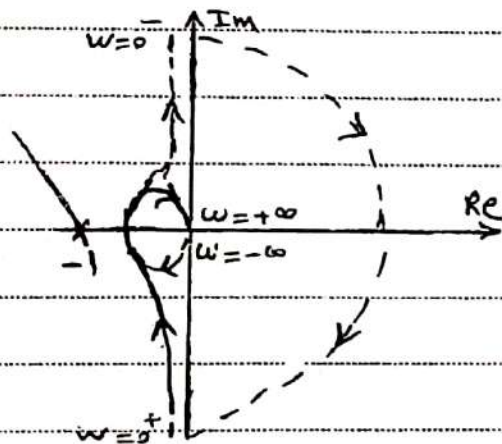
$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(1+T_1s)(1+T_2s)}$$

$$G(j\omega)H(j\omega) = \left(\frac{1}{\omega} \angle -90^\circ - \frac{1}{\sqrt{1+T_1^2\omega^2}} \angle -\tan^{-1}(T_1\omega) \right) \left(\frac{1}{\sqrt{1+T_2^2\omega^2}} \angle -\tan^{-1}(T_2\omega) \right)$$

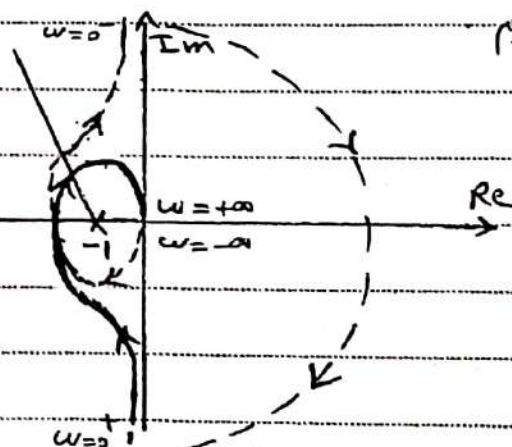
$$\omega \rightarrow 0 \Rightarrow (\infty \angle -90^\circ)(1 \angle 0^\circ)(1 \angle 0^\circ) = \infty \angle -90^\circ$$

$$\omega \rightarrow \infty \Rightarrow (0 \angle -90^\circ)(0 \angle -90^\circ)(0 \angle -90^\circ) = 0 \angle -270^\circ$$

بنابراین سیستم تابع تبدیل حلقه باز فوق را به ازای K های کوچک و بزرگ رسم می کنیم



« K کوچک »



« K بزرگ »

$$N=0 \text{ \& } P=0 \Rightarrow Z=0$$

پایدار

$$N(+)=2 \text{ \& } P=0 \Rightarrow Z=2$$

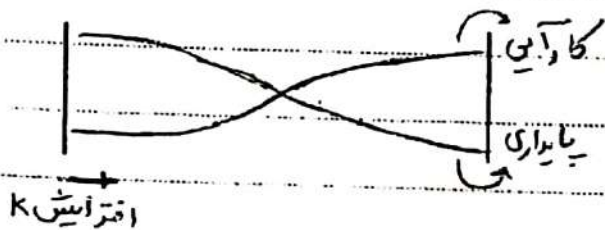
ناپایدار

* به ازای مقادیر کوچک K نقطه $z=0$ - دو ریشه بی شود پس سیستم به ازای مقادیر کوچک K پایدار است. به ازای مقادیر بزرگ K مکان هندسی $G(s)H(s)$ نقطه $z=0$ - را دوبار در جهت ساعتگرد دور می زند که نشان می دهد سیستم دو قطب حلقه بسته در نیمه راست صفحه s دارد و ناپایدار است.

* سیستم فوق برای داشتن وقت خوب با سیستم K بزرگ داشته باشد از طرفی



همان طور که در فصول گذشته ذکر کردیم افزایش K باعث کاهش پایداری سیستم می گردد و برای اینکه بتوان بین دقت و پایداری سیستم توافق ایجاد نمود بایستی از حیران ساز استفاده نمود.



* نمودارهای قطبی این مثال با فرض اینکه نمودار در صحنه S قطب واقع در مبدأ را در جهت پادساعتگرد دور می زنیم رسم شده اند.

مثال) پایداری سیستم حلقه بسته ای با تابع تبدیل حلقه باز زیر به مقادیر نسبی T_1 و T_2 بستگی دارند. نمودار نایکویست را بر اساس مقادیر نسبی T_1 و T_2 رسم کرده و پایداری سیستم را بررسی کنید.

$$G(s)H(s) = \frac{K(T_2s + 1)}{s^2(T_1s + 1)}$$

$$G(j\omega)H(j\omega) = \left(\frac{1}{\omega^2} \angle -180^\circ \right) \left(\frac{1}{\sqrt{1+T_1^2\omega^2}} \angle -\tan^{-1}(T_1\omega) \right) \left(\sqrt{1+T_2^2\omega^2} \angle \tan^{-1}(T_2\omega) \right)$$

نکته *

همواره در صورتی که سیستم دارای قطب واقع در مبدأ از مرتبه n باشد اثر همان قطب در فرکانس های بالا $\omega \rightarrow \infty$ دیده می شود.

$$\begin{cases} \frac{1}{s} \rightarrow \angle -90^\circ \\ \frac{1}{s^2} \rightarrow \angle -180^\circ \\ \vdots \\ \frac{1}{s^n} \rightarrow \angle -n(90^\circ) \end{cases}$$

برای سیستم های مینیم فاز:

$$\omega \rightarrow \infty : \angle = -90^\circ (n-m)$$

در صورتی که $n > m$

در این مثال:

$$\angle \frac{1}{(j\omega)^2} = \angle (j\omega)^{-2} = -2 \angle (j\omega) = -2 \angle \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{0}\right) = -2(90^\circ) = -180^\circ$$

$$\omega \rightarrow \infty \Rightarrow (0 \angle -180)(0 \angle -90)(\infty \angle 90) = 0 \angle -180$$

قبل تقسيم
 $0 \times \infty = 0$

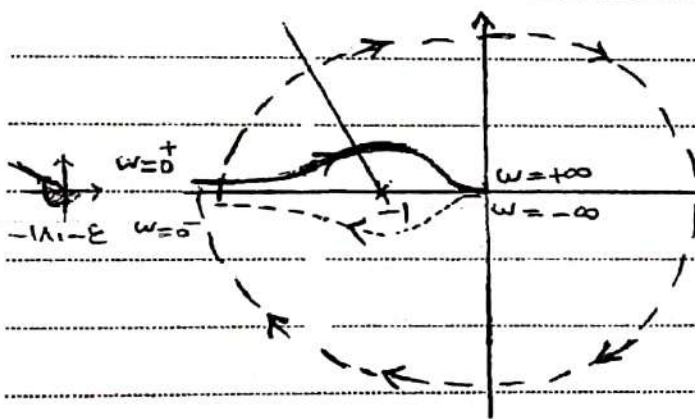
$$\omega \rightarrow 0 \Rightarrow \text{به مقدار } T_r \text{ و } T_i \text{ وابسته است}$$

حالت اول) $T_i > T_r$

$$\tan^{-1} T_r \omega > \tan^{-1} T_i \omega$$

$$\Rightarrow \lim_{\omega \rightarrow 0^+} \tan^{-1}(T_r \omega) - \tan^{-1}(T_i \omega) = -\varepsilon^\circ$$

$$\omega \rightarrow 0 \Rightarrow (\infty \angle -180)(1 \angle 1 \angle -\varepsilon^\circ) = (\infty \angle -180 - \varepsilon^\circ)$$



$$\text{حرکت} \begin{cases} 0^+ \rightarrow +\infty \\ +\infty \rightarrow -\infty \\ -\infty \rightarrow 0^- \\ 0^- \rightarrow 0^+ \end{cases}$$

مثل حالت قبل به صورت ساعتگرد
(با فرض)

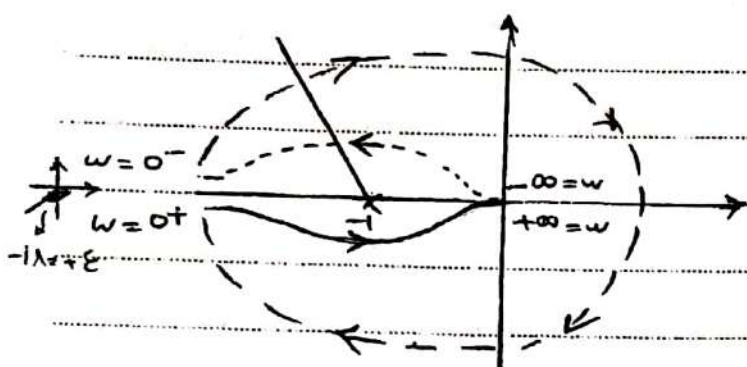
$$\left. \begin{array}{l} P=0 \\ N=1 \end{array} \right\} \Rightarrow Z=+1 \quad (\text{ناپایدار})$$

حالت دوم) $T_r > T_i$

$$\tan^{-1} T_r \omega > \tan^{-1} T_i \omega$$

$$\Rightarrow \lim_{\omega \rightarrow 0^+} \tan^{-1}(T_r \omega) - \tan^{-1}(T_i \omega) = +\varepsilon^\circ$$

$$\omega \rightarrow 0 \Rightarrow (\infty \angle -180)(1 \angle 1 \angle +\varepsilon^\circ) = (\infty \angle -180 + \varepsilon^\circ)$$



$$\left. \begin{array}{l} N+P=0 \\ P=0 \end{array} \right\} \Rightarrow z=0 \text{ (بایدار)}$$

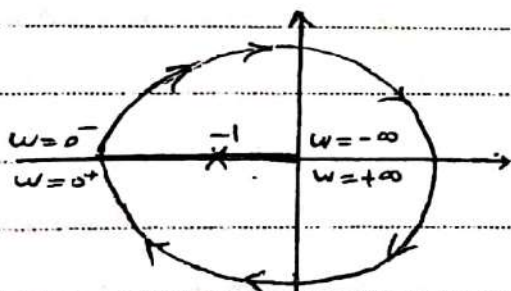
حالت سوم $T_1 = T_2$

$$\text{tg}^{-1} T_1 w = \text{tg}^{-1} T_2 w$$

$$\Rightarrow \lim_{w \rightarrow 0} \text{tg}^{-1}(T_2 w) - \text{tg}^{-1}(T_1 w) = 0$$

$$w \rightarrow 0 \pm$$

$$w \rightarrow 0 \Rightarrow (\infty \pm -180^\circ)(-180^\circ \pm 0) = \infty \pm -180^\circ$$



نکته:

۱. نمودار نایکویست اگرچه توسط تابع تبدیل حلقه باز رسم می شود ولی برای بررسی پایداری تابع تبدیل حلقه بسته بکار می رود.

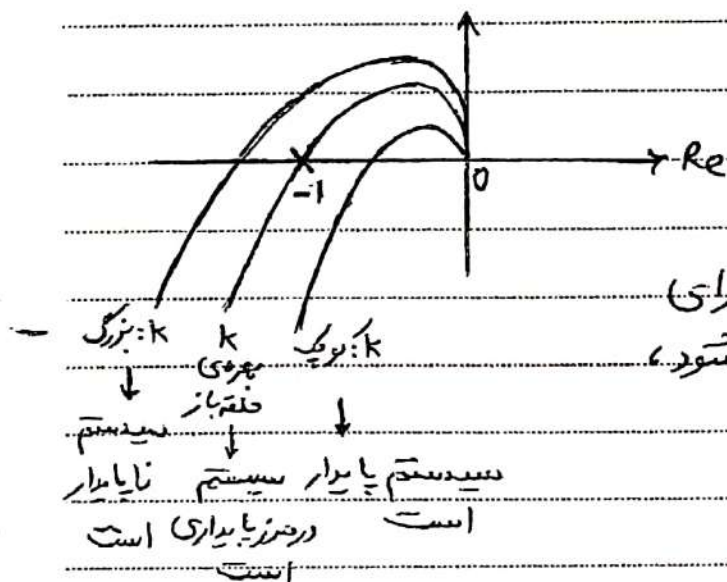
۲. در سیستم های ناهمبند فاز زاویه ای شروع و اتمام را با بستی محاسبه کنیم و روند ثابتی برای آنها قابل تعریف نیست البته در اکثر موارد در حالت ناهمبند فاز داریم

$$w \rightarrow \infty \Rightarrow \phi = -90(n+m)$$

درجهی مخرج $\rightarrow$ درجهی صورت $\rightarrow$

حاشیه های فاز و بهره (حرف فاز و بهره):

در ابتدا جا دارد که آنچه در صفحہ ۱۹۷ این پژوه بیان کردیم در نمودار قطبی $G(s)$ زیر و به ازای سه مقدار متفاوت بهره ی حلقه ی باز k نشان داده شود.



حال به تعریف حرف فاز و بهره ونحوه ی محاسبه ی هر کدام می پردازیم:

حاشیه یا حد فاز: Phase Margin

حد فاز عبارت است از مقدار پیمافازی لازم در فرکانس عبور بهره، برای قرار دادن سیستم در مرز ناپایداری.

فرکانس عبور بهره فرکانسی است که در آن $|G(j\omega)|$ یعنی دامنه ی تابع تبدیل حلقه باز برابر یک می شود.

حد فاز PM، حاصل جمع 180° و فاز ϕ تابع تبدیل حلقه باز و فرکانس عبور بهره است.

یعنی:

$$PM = 180^\circ + \phi$$

حاشیه یا حد بهره: Gain Margin

حد بهره عکس دامنه ی $|G(j\omega)|$ در فرکانسی که زاویه ی فاز 180° می شود است. یعنی زمانی که

$$PM = 0 \Rightarrow 180^\circ + \phi = 0 \Rightarrow \phi = -180^\circ$$

اگر فرکانس عبور زاویه‌ی فاز با رافترکانس تعریف کنیم که در آن زاویه‌ی تابع تبدیل حلقه باز ۱۸۰ می‌شود، حد بهره GM عبارت است از:

$$GM = \frac{1}{|G(j\omega)|}$$

و اگر بر حسب رسی بیان کنیم:

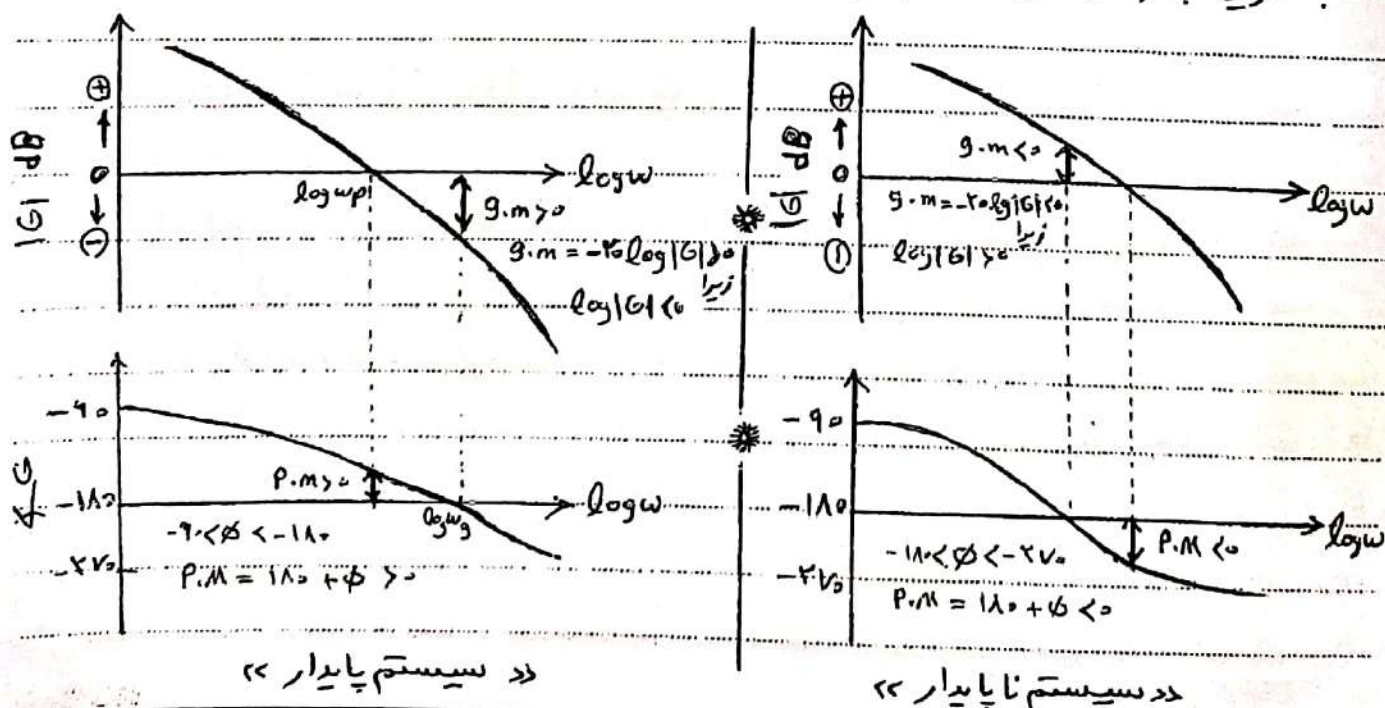
$$GM (dB) = 20 \log GM = -20 \log |G(j\omega)|$$

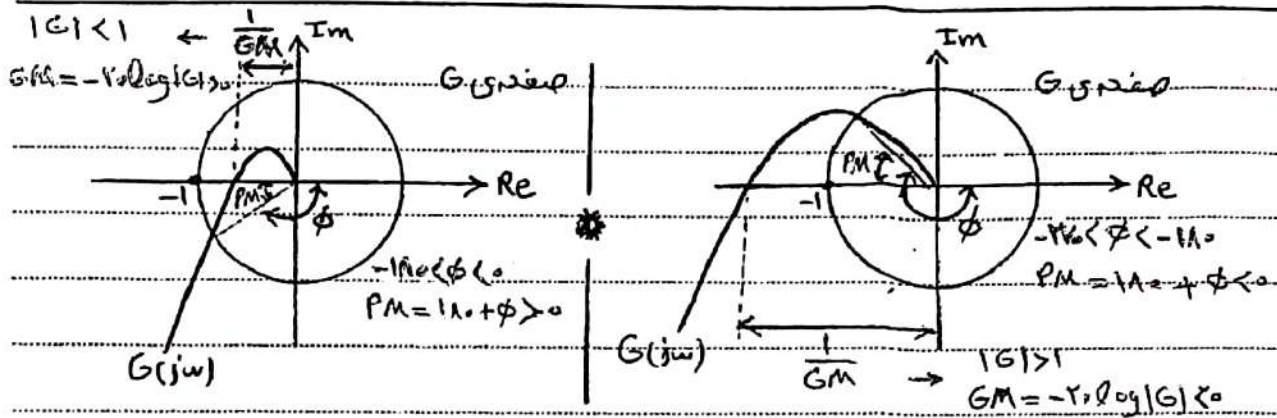
نکات:

۱. در یک سیستم مینیمم فاز، هم حد بهره و هم حد فاز باید مثبت باشند تا سیستم پایدار باشد. متنی بودن یکی از این دو در به معنی ناپایداری سیستم است.

۲. حد بهره در سیستم‌های مرتبه‌ی اول یا دوم ۰ است زیرا برای چنین سیستم‌هایی نمودار قطبی بخش منفی محور حقیقی را قطع نمی‌کند. لذا این سیستم‌ها از لحاظ تئوری نمی‌توانند ناپایدار باشند.

۳. برای سیستم‌های پایداری که چند فرکانس عبور بهره (ارند) حد فاز در فرکانس عبوری که بالاترین بهره را دارد محاسبه می‌شود.





سیستم پایدار

سیستم ناپایدار

همان طوری که در نکته ۱! در صفحه قبل نیز بیان شد:

$g.m. > 0$
 $P.M. > 0$ $\Rightarrow$ سیستم کاملاً پایدار است

$g.m. < 0$
 $P.M. < 0$ $\Rightarrow$ سیستم کاملاً ناپایدار است

بسته به شرایط می توانیم سیستم را پایدار یا غیر پایدار کنیم.
 $P.M. < 0$ or $g.m. > 0$ $\Rightarrow$
 $P.M. > 0$ or $g.m. < 0$

نحوه محاسبه حوافز و حذبیره:

محاسبه حوافز:

۱. اندازه $|GH|$ را مساوی یک قرار می دهیم و فرکانس قطع بهره ω را محاسبه می کنیم
۲. زاویه $\angle GH$ را در فرکانس ω بدست آورده از بالا محاسبه می کنیم
۳. به زاویه بدست آمده در بند ۲، 180° اضافه می کنیم

$$\begin{cases} |GH| = 1 \rightarrow \omega_g \\ \angle GH = -180^\circ \\ P.M. = 180^\circ + \phi|_{\omega_g} \end{cases}$$

محاسبه‌ی حاشیه‌ی بهره:

۱. زاویه‌ی GH ($4 GH$) را مساوی 180° قرار داده و فرکانس قطع فاز ω_p را

محاسبه‌ی می‌کنیم.

۲. اندازه‌ی $|GH|$ را در فرکانس ω_p بدست آمده از بالا محاسبه‌ی می‌کنیم.۳. بند ۲ را عکس می‌کنیم و اثر بر حسب dB بخواهیم، از این مقدار عکس شده،یک مقدار 20 نیز می‌گیریم.

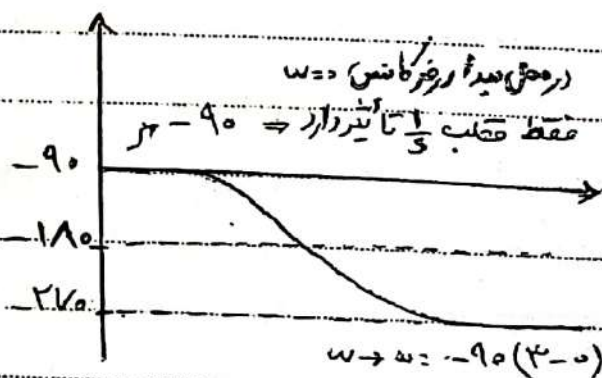
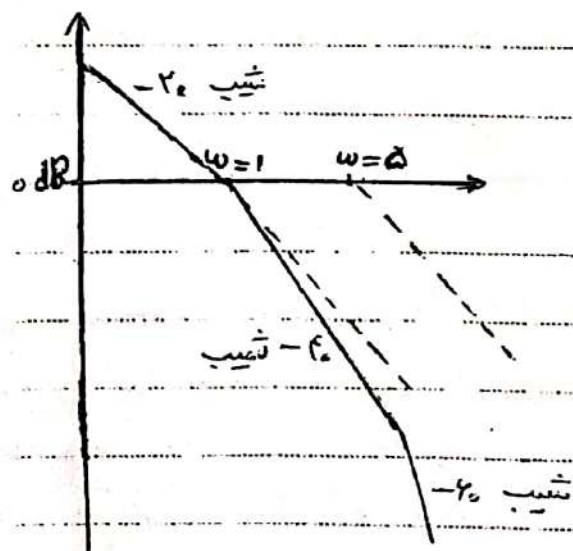
$$\left\{ \begin{array}{l} P.M = 0 \rightarrow \phi + 180 = 0 \rightarrow \phi = -180 \rightarrow \omega_p \\ |GH|_{\omega_p} = \sqrt{ } \\ G.M = \frac{1}{|GH|_{\omega_p}} \quad \text{or} \quad G.M = 20 \log \frac{1}{|GH|_{\omega_p}} \end{array} \right.$$

* اگر نمودار از نوع بُرد بود $G.M$ از نوع دسی بل dB است و اگر نمودار به صورتناکویست بود $G.M$ از جنس دامنه است.

مثال) ابتدا نمودار بُرد تابع تبدیل زیر را رسم کرده و سپس حاشیه فاز و حاشیه‌ی

بهره را محاسبه‌ی می‌ایم.

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+5)}$$

در ابتدا در تابع تبدیل فوق به جای s ، ω قرار می‌دهیم.

محاسبی حد بهره:

$$PM = 0 \rightarrow \phi + 180 = 0 \rightarrow \phi = -180$$

$$\phi = \angle G(j\omega) = -\underbrace{\tan^{-1}\left(\frac{j\omega}{2}\right)}_{-90} - \tan^{-1}(\omega) - \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{5}\right) = -180$$

$$\Rightarrow \tan^{-1}\omega + \tan^{-1}\frac{\omega}{5} = 90$$

نمود:

$$\tan^{-1}A + \tan^{-1}B = \tan^{-1} \frac{A+B}{1-AB}$$

در نتیجه داریم:

$$\tan\left(\tan^{-1}\omega + \tan^{-1}\frac{\omega}{5} = 90\right)$$

$$\tan\left(\tan^{-1} \frac{\omega + \frac{\omega}{5}}{1 - \omega \cdot \frac{\omega}{5}}\right) = \tan 90 \Rightarrow \frac{\omega + \frac{\omega}{5}}{1 - \omega \left(\frac{\omega}{5}\right)} = \infty$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{\omega^2}{5} = 0 \Rightarrow \omega^2 = 5 \Rightarrow \omega_p = \sqrt{5}$$

$$gm = -20 \log |G(j\omega)|_{\omega=\sqrt{5}} = -20 \log \left. \frac{1}{\omega(\sqrt{1+\omega^2})(\sqrt{25+\omega^2})} \right|_{\omega=\sqrt{5}}$$

$$= -20 \log \frac{1}{\sqrt{5}\sqrt{6}\sqrt{30}} = 29.54 \text{ dB}$$

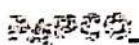
محاسبی حتماً:

$$|G(j\omega)| = 1 \text{ or } 0 \text{ dB}$$

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\omega^2}\sqrt{\omega^2+1}\sqrt{\omega^2+25}} = 1 \Rightarrow \omega^2(\omega^2+1)(\omega^2+25) = 1$$

حال برای ω^2 و x قرار می دهیم:

$$x(1+x)(25+x) - 1 = 0$$

برای محاسبی x از روش تکرار استفاده می کنیم.

Sina SD619

$$x_{k+1} = f(x_k) \quad \text{روش تکرار}$$

حال معادله را به صورت زیر نوشته

$$x = \frac{1}{(1+x)(25+x)} = \frac{1}{x^2 + 26x + 25}$$

استفاده از ماشین حساب:

ابتدا یک عدد دلخواه را در ماشین حساب وارد کرده و سپس دکمه ی Ans را می زنیم حال عبارت زیر را در ماشین حساب وارد می کنیم:

سپس اینقدر مساوی می زنیم تا اینکه ماشین حساب یک عدد ثابت و بدون تغییر را نشان دهد این عدد جواب مساله است.

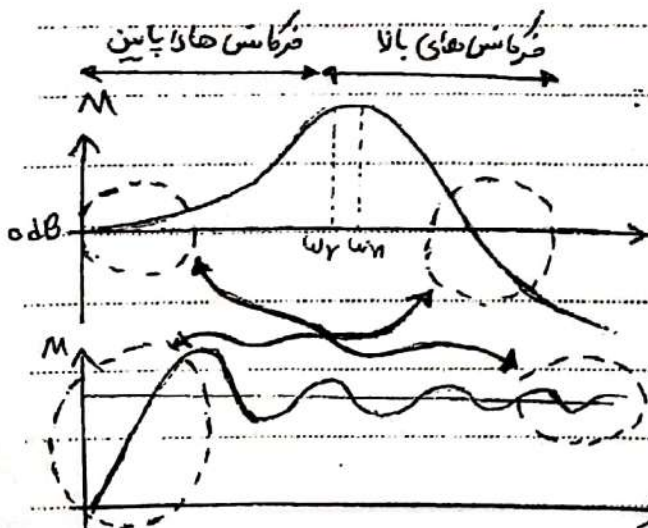
$$x = \frac{1}{(Ans)^2 + 26(Ans) + 25} = 0.038$$

$$x = \omega^2 = 0.038 \Rightarrow \omega = 0.1941$$

$$P.M = 110 + \phi(\omega)$$

$$\phi(\omega) = -90 - \tan^{-1}(0.1941) - \tan^{-1}\left(\frac{0.1941}{5}\right) = -103.24^\circ$$

$$\Rightarrow P.M = 110 - 103.24 = 6.76^\circ$$



همبستگی بین پاسخ فرکانسی و پاسخ زمانی
این همبستگی در شکل زیر نمایش داده شده است.

$$M_r = \frac{1}{2\sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$M_p = e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \times 100$$

پاسخ حالت پهنای برابر است :

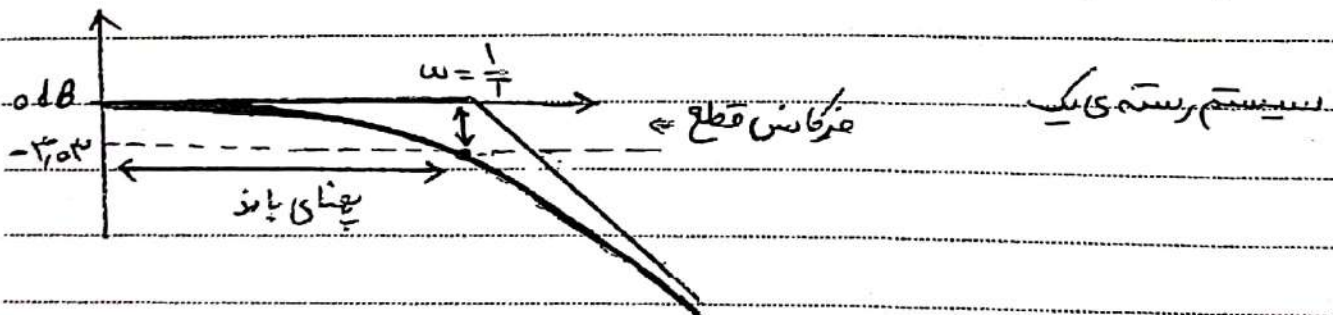
$$M_{SS} = \lim_{S \rightarrow 0} S Y(S) \stackrel{S=j\omega}{=} \lim_{\omega \rightarrow 0} j\omega Y(j\omega) = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$$

فرکانس قطع cut-off و پهنای باند Band width :

فرکانس ω_c که در آن دامنه‌ی پاسخ فرکانسی حلقه بسته ۳dB کمتر از دامنه‌ی پاسخ فرکانسی ورودی می‌گردد، فرکانس قطع نامیده می‌شود. سیستم‌های حلقه بسته مولفه‌های سیگنال دارای فرکانس بالاتر از فرکانس قطع را فیلتر می‌کنند تا مولفه‌هایی را عبور دهند که فرکانس‌های پایین‌تر از فرکانس قطع داشته باشند.

گستره‌ی فرکانسی ω_c که در آن دامنه‌ی پاسخ فرکانسی حلقه بسته بالاتر از ۳dB است پهنای باند سیستم نامیده می‌شود.

پهنای باند فرکانسی را مشخص می‌کند که در آن افت عبور نسبت به مقدار فرکانس پایین شروع می‌شود پس پهنای باند نشان می‌دهد که سیستم در دنبال کردن ورودی سیستم چقدر خوب عمل می‌کند.



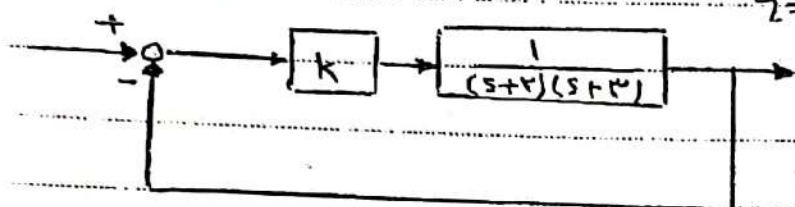
$$M(\omega) \Big|_{\omega = \frac{1}{T}} = -3.03 \text{ dB}$$

نکات:

۱. به ازای ω_c هر چه نسبت میرایی ζ بزرگتر باشد، زمان M کم‌تر می‌گردد و نیز بزرگتر می‌شود.
 ۲. با افزایش پهنای باند، فرکانس قطع افزایش یافته و سیستم سریع‌تر پاسخ می‌دهد.
- پاسخ سیستم سریع خواهد شد / $T \downarrow$ / $\omega_c \uparrow$ / پهنای باند $\uparrow$

« نمونه سوالات »

مثال) در مدار شکل زیر مطلوب است :

الف) پایداری سیستم به ازای مقادیر مختلف k ب) محاسبه k به طوری که $\zeta = 0.7$ 

$$\text{الف) } G(s) = \frac{k}{(s+2)(s+3)} = \frac{k}{1 + \frac{k}{(s+2)(s+3)}}$$

$$F(s) = (s+2)(s+3) + k = s^2 + 5s + 6 + k$$

$$s^2 \quad 1 \quad 6+k$$

$$s^1 \quad 5 \quad 0$$

$$s^0 \quad 6+k \quad 0 \Rightarrow 6+k > 0 \Rightarrow k > -6$$

$$\text{ب) } \begin{cases} s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0 \\ s^2 + 5s + 6+k = 0 \end{cases}$$

$$2\zeta\omega_n = 5 \xrightarrow{\zeta=0.7} \omega_n = \frac{5}{1.4} = 3.57$$

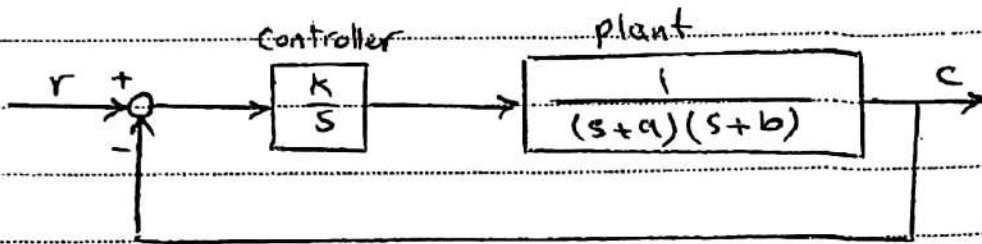
$$\omega_n^2 = 6+k \xrightarrow{\omega_n=3.57} k = 6.955$$

مثال) در مدار شکل زیر

I) پاسخ پله سیستم دلتا باز برابر با واحد می شود

II) زمانی که یک کنترلر $\frac{k}{s}$ در آن قرار دهیم k در مرز پایداری برابر با $\frac{5}{2}$ می شود

با استفاده از این اطلاعات a , b , را مناسب کنید.



حل :

۱. طبقه باز یعنی اینکه کنترلر نداریم و plant را می توان جدا نمود

$$C_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{(s+a)(s+b)} \cdot \frac{1}{s} = 1$$

↓
بدیه

$$\Rightarrow \frac{1}{ab} = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{b}$$

(II)

$$\frac{C}{R} = \frac{\frac{k}{s(s+a)(s+b)}}{1 + \frac{k}{s(s+a)(s+b)}} = \frac{k}{s(s+a)(s+b) + k}$$

$$F(s) = s(s+a)(s+b) + k = 0$$

۲. روش برای حل وجود دارد :

۱- روش راوش

۲- روش $s = j\omega$

این مثال را با روش ۲ حل می کنیم.

$$F(s) = s^3 + (a+b)s^2 + abs + k = 0$$

$$\stackrel{a=\frac{1}{b}}{=} -j\omega^3 - (a + \frac{1}{a})\omega^2 + a(\frac{1}{a})(j\omega) + k = 0$$

$$= (k - (a + \frac{1}{a})\omega^2) + j\omega(1 - \omega^2)$$

$$1 - \omega^2 = 0 \Rightarrow \omega^2 = 1$$

$$k - (a + \frac{1}{a})\omega^2 = 0 \stackrel{\omega=1}{\Rightarrow} k = (a + \frac{1}{a}) \Rightarrow a + \frac{1}{a} = \frac{\omega}{r}$$

Page

Sina SD619

$$2a^2 + 2 = 5a \rightarrow 2a^2 - 5a + 2 = 0$$

$$a = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2 \times 2} = \frac{5 \pm 3}{4}$$

$$\begin{aligned} a = \frac{5+3}{4} = 2 &\Rightarrow b = \frac{1}{2} \\ a = \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2} &\Rightarrow b = 2 \end{aligned}$$

مثال مکان هندسی ریشه های $G(s) = \frac{1}{s(s^2+1)}$ را بیابید.

$$\left. \begin{aligned} n = 3 &\rightarrow s = 0, j, -j \\ m = 0 &\text{تعداد صفرها} \end{aligned} \right\}$$

$$S_{\text{میان}} = \frac{\sum p_i - \sum z_i}{n - m} = \frac{(0 + j - j) - 0}{3 - 0} = 0$$

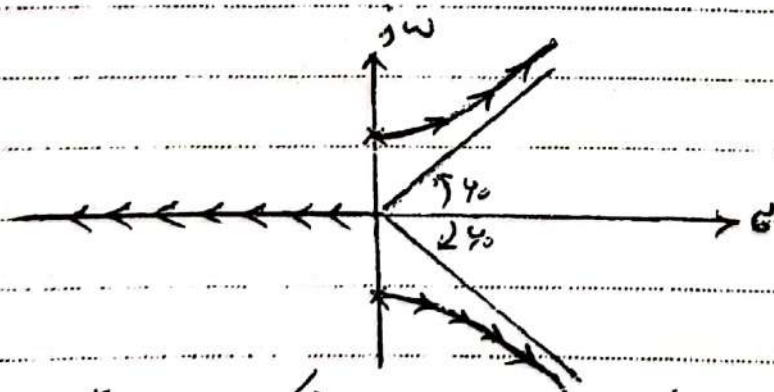
$$\text{زاویه میانی} = \frac{\pm 180(2q+1)}{n-m} = \frac{\pm 180(2q+1)}{3-0} = \pm 60, 180$$

$$\text{زاویه میانی خروج از قطب} = 180 - \left(\begin{array}{l} \text{جمع زاویه میانی برای} \\ \text{رسم شده از سایر} \\ \text{قطبها به آن قطب} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{l} \text{جمع زاویه میانی برای} \\ \text{رسم شده از سایر} \\ \text{صفرها به آن قطب} \end{array} \right)$$

$$\text{For } s=0 \rightarrow 180 - (90 - 90) + 0 = 180$$

$$\text{For } s=j \rightarrow 180 - (90 + 90) + 0 = 0$$

$$\text{For } s=-j \rightarrow 180 - (-90 - 90) + 0 = 360$$



برای مثال نقطه‌ای شکست را بررسی نکردیم زیرا نقطه‌ای شکست محصلاً بین دو قطب یا دو صفر متوالی روی محور حقیقی وجود دارد.

مثال) مکان هندسی ریشه‌ها برای تابع تبدیل $G(s) = \frac{K(s+2)}{s^2 - 4s + 13}$ را رسم کنید

$$\begin{cases} \text{تعداد قطب‌ها} : m=1 \rightarrow s=-2 \\ \text{تعداد صفرها} : n=2 \rightarrow s = \frac{4 \pm \sqrt{16-52}}{2} \end{cases} \begin{cases} s=2+3j \\ s=2-3j \end{cases}$$

$$s_{\text{میان}} = \frac{\sum \text{Re } p_i - \sum \text{Re } z_i}{n-m} = \frac{2+2 - (-2)}{2-1} = 4$$

$$\text{زاویه‌ی میان‌ها} = \frac{\pm 180(29+1)}{n-m} = \frac{\pm 180(29+1)}{2-1} = \pm 180$$

* برای محاسبه‌ی نقطه‌ی شکست داریم:

$$1 + K \frac{s+2}{s^2 - 4s + 13} = 0 \rightarrow K = -\frac{s^2 - 4s + 13}{s+2}$$

$$\frac{dK}{ds} = 0 \rightarrow \frac{(2s-4)(s+2) - (s^2 - 4s + 13)}{(s+2)^2} = \frac{-(s^2 + 4s - 21)}{(s+2)^2} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} s=1,87 & \times \\ s=-5,87 & \checkmark \end{cases}$$

چون نزد مکان هندسی ریشه‌ها

(5) باشد

مکان هندسی



برای محاسبه‌ی مقدار K در محل برنقور دیام حور موهومی داریم

$$\frac{C}{r} = \frac{\frac{K(s+2)}{s^2 - 4s + 13}}{1 + \frac{K(s+2)}{s^2 - 4s + 13}} = \frac{K(s+2)}{s^2 - 4s + 13 + K(s+2)}$$

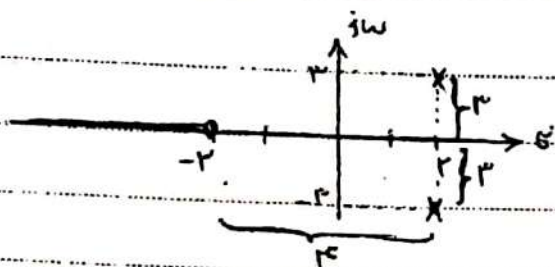
$$F(s) = s^2 + (K-4)s + 2K + 13 = 0$$

$$s = j\omega \Rightarrow -\omega^2 + (K-4)j\omega + 2K + 13 = 0$$

$$\text{Re} \left\{ -\omega^2 + 13 + 2K = 0 \right. \quad \left. \omega^2 = 21 \Rightarrow \omega = \sqrt{21} \right.$$

$$\text{Im} \left\{ (K-4)\omega = 0 \right. \quad \left. \rightarrow K=4 \right.$$

$$\Rightarrow s = \pm j\omega = \pm \sqrt{21}j = \pm 4,58j$$



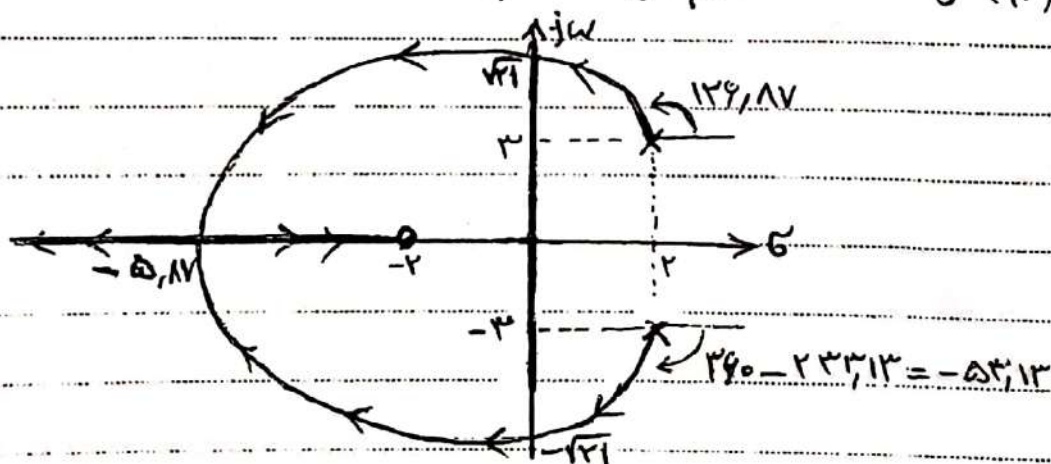
$$\text{زاویسی خروج از قطب} = 180 - \left(\begin{array}{l} \text{جمع زوایای بردارهای رسم} \\ \text{شده از سایر قطبها به} \\ \text{آن قطب} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{l} \text{جمع زوایای بردارهای} \\ \text{رسم شده از سایر} \\ \text{صفرها به آن قطب} \end{array} \right)$$

$$\text{For } s = 2 + 3j \rightarrow 180 - 90 + \tan^{-1}\left(\frac{3}{2}\right) = 124, 17$$

$$\text{For } s = 2 - 3j \rightarrow 180 - (-90) + (-\tan^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)) = 233, 13$$

$$\text{زاویسی ورود به صفر} = -180 + \left(\begin{array}{l} \text{جمع زوایای بردارهای} \\ \text{رسم شده از سایر} \\ \text{قطبها به آن صفر} \end{array} \right) - \left(\begin{array}{l} \text{جمع زوایای رسم شده} \\ \text{از سایر صفرها به} \\ \text{آن صفر} \end{array} \right)$$

$$\text{For } s = -2 \rightarrow -180 + (90 + \tan^{-1}\left(\frac{4}{2}\right) + 180 + \tan^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)) - 0 = 112$$



مثال) نمودار نایکوویست تابع تبدیل زیر را رسم کرده و حد فاز و بهره‌ی آن را محاسبه کنید.

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

استقرار سیستم را در $s = jw$ بررسی کنید.

$$G(jw) = \frac{1}{jw(jw+1)}$$

$$P.M = 0 \rightarrow \phi + 180 = 0 \rightarrow \phi = -180$$

$$\phi = \angle G(j\omega) = -\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{0}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{1}\right) = -180$$

$$\Rightarrow \tan^{-1}\omega = 90 \Rightarrow \omega = \infty$$

$$1 + K G(j\omega) = 0 \Rightarrow K = \frac{1}{|G(j\omega)|} = \frac{1}{\frac{1}{\omega\sqrt{\omega^2+1}}} = \omega\sqrt{\omega^2+1}$$

$$G.M = K = \omega\sqrt{\omega^2+1} \xrightarrow{\omega=\infty} \infty \Rightarrow g.m = \infty$$

$$|G(j\omega)| = 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\omega\sqrt{1+\omega^2}} = 1 \Rightarrow \omega^2(1+\omega^2) - 1 = 0$$

$$\omega^2 + \omega^4 - 1 = 0 \xrightarrow{x=\omega^2} x^2 + x - 1 = 0 \begin{cases} x = \omega^2 = 0.42 \Rightarrow \omega = 0.64 \\ x = \omega^2 = -1.42 \end{cases}$$

$$\phi = \angle G(j\omega) = -90 - \tan^{-1}(\omega) \Big|_{\omega=0.64} = -124.9 \approx -125$$

$$P.M = 180 + \phi = 180 - 125 = 55$$

برای رسم نمودار نایکویست داریم:

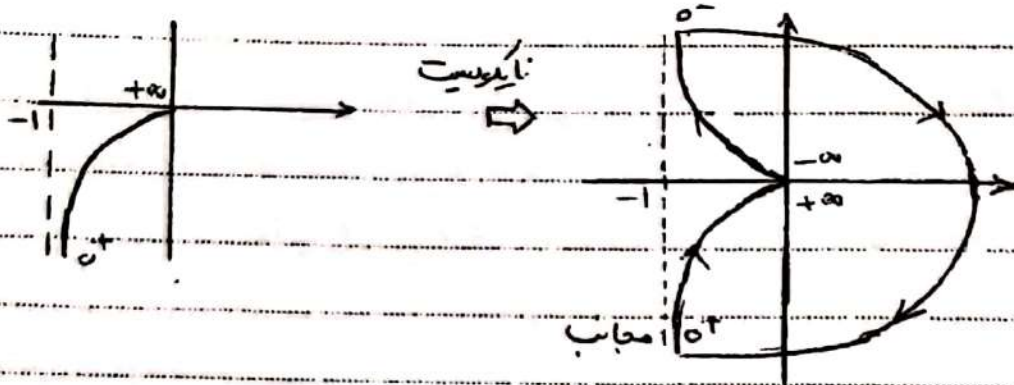
$$\left(\frac{1}{\omega} \angle -90\right) \left(\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}} \angle -\tan^{-1}\omega\right)$$

$$\omega \rightarrow 0 \Rightarrow (\infty \angle -90)(1 \angle 0) = \infty \angle -90$$

$$\omega \rightarrow \infty \Rightarrow (0 \angle -90)(0 \angle -90) = 0 \angle -180$$

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega(1+j\omega)} \times \frac{j\omega(1-j\omega)}{j\omega(1-j\omega)} = \frac{j\omega + \omega^2}{-\omega^2(1+\omega^2)} = \frac{-1}{1+\omega^2} + j \frac{\omega}{1+\omega^2}$$

$$\omega \rightarrow 0 \Rightarrow G(j\omega) = -1 - j\infty \quad \begin{matrix} \nearrow Re \rightarrow -1 \\ \searrow Im \rightarrow -\infty \end{matrix} \quad \text{مجاذب}$$



مثال) در تابع تبدیل حلقه باز $G(s) = \frac{1}{s^2(s+1)}$ مطلوب است:

الف) محاسبه ی حد فاز و بهره به ازای $k=10$

ب) رسم نمودار نایکوئیست و بررسی پایداری آج تبدیل حلقه بسته

$$PM=0 \rightarrow \phi + 180 = 0 \rightarrow \phi = -180$$

$$\phi = \angle G(j\omega) = -90 - 90 - \tan^{-1}\omega = -180 \Rightarrow \tan^{-1}\omega = 0 \Rightarrow \omega = 0$$

$$k = \frac{1}{|G(j\omega)|_{\omega=0}} = \omega^2 \sqrt{\omega^2 + 1} \Big|_{\omega=0} = 0$$

بنابراین حد بهره یا GM نداریم
علت این موضوع این است که به محض تغییر k سیستم ناپایدار می شود

$$|G(j\omega)| = \frac{k}{\omega^2 \sqrt{1+\omega^2}} = 1 \Rightarrow \frac{10}{\omega^2 \sqrt{1+\omega^2}} = 1$$

$$\Rightarrow \omega^4(1+\omega^2) = 100 \Rightarrow \omega^4 + \omega^6 - 100 = 0$$

به جای ω^2 ، a قرار می دهیم

Sina Sanedoust

$$a^3 + a^2 - 100 = 0$$

$$a^3 = 100 - a^2 \Rightarrow a = (100 - a^2)^{\frac{1}{3}}$$

رابطه‌ی فوق تنها رابطه‌ای است که سبب می‌شود جواب معکوس شود.
همواره برای استفاده از روش تکراری $f(x_k) = x_{k+1}$ با سبب کاری کنیم که معادله‌ی مورد نظر معکوس شود.

برای محاسبه‌ی جواب از معادله‌ی فوق با استفاده از ماشین حساب و باروش تکراری ابتدا یک عدد را خواص را در ماشین حساب می‌زنیم سپس این عدد را مساوی Ans قرار می‌دهیم و پس از آن رابطه‌ی $a = (100 - (Ans)^2)^{\frac{1}{3}}$ را در ماشین حساب نوشته و مساوی را چندین بار می‌زنیم تا پاسخ ماشین حساب بر روی عدد ثابتی بماند این عدد ثابت پاسخ مساله است.

$$a = (100 - (Ans)^2)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow a = \omega^2 = 4, 2242$$

$$\Rightarrow \omega = 2, 08$$

$$\phi = -90 - 90 - \tan^{-1} \omega \Big|_{\omega=2,08} = -64 - 180$$

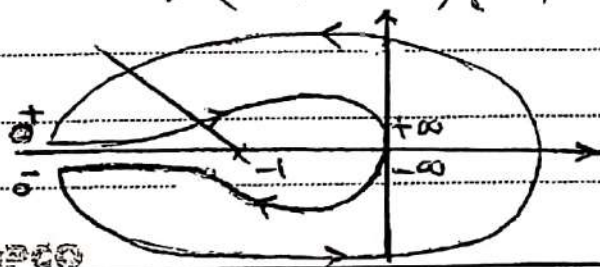
$$P.M = 180 + \phi = 180 - 180 - 64 = -64$$

برای رسم نمودار نایکوئیست داریم:

$$\left(\frac{1}{\omega^2} - 180 \right) \left(\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}} - \tan^{-1} \omega \right)$$

$$\omega \rightarrow 0 \Rightarrow (\infty - 180)(1 - 0) = \infty - 180$$

$$\omega \rightarrow \infty \Rightarrow (0 - 180)(0 - 90) = 0 - 270$$



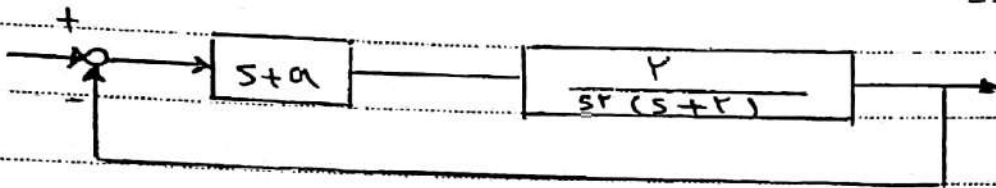
$$\begin{aligned} N+D &= 0 \\ P &= 0 \end{aligned} \Rightarrow Z = 0$$

همواره پایدار

Page 222

Sina SD619

مثال) مکان هندسی ریشه‌ها برای تابع تبدیل مدار زیر زمانی که $a \rightarrow \infty$ میل می‌کند را محاسبه نمایید.



حل: در چنین مسائلی که ضریب بهره (a) خود به صورت حاصل جمع بایک عبارت دیگر نوشته شده است بایستی با اعمال ریاضی مناسب آن را به صورت حاصل ضرب در یک تابع تبدیل حلقه باز درآوریم تا بتوانیم مکان هندسی ریشه‌های آن را رسم کنیم.

$$G(s) = \frac{2(s+a)}{s^2(s+2)} = \frac{2(s+a)}{1 + \frac{2(s+a)}{s^2(s+2)}} = \frac{2(s+a)}{s^2(s+2) + 2(s+a)}$$

$$F(s) = s^3 + 2s^2 + 2s + 2a$$

باید رابطه‌ی فوق را به صورت زیر درآوریم:

$$1 + K G(s) = 0$$

↓
« تابع تبدیل حلقه باز جدید »

$$\Rightarrow (s^3 + 2s^2 + 2s + 2a = 0) \times \frac{1}{s^3 + 2s^2 + 2s}$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{(2a) \cdot k}{s^3 + 2s^2 + 2s} = 0 \Rightarrow 1 + \frac{k}{s(s^2 + 2s + 2)} = 0$$

حال کافی است مکان هندسی ریشه‌های تابع تبدیل $\frac{k}{s(s^2 + 2s + 2)}$ را رسم نماییم.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{تعداد صفرها: } m = 0 \\ \text{تعداد قطب‌ها: } n = 3 \end{array} \right.$$

$$\rightarrow s = 0, s = -1 - j, s = -1 + j$$

$$S_{\text{میان}} = \frac{\sum p_i - \sum z_i}{n-m} = \frac{(-1+1-1-1+0)-(0)}{3-0} = -\frac{2}{3}$$

$$\text{زاوی می معانی ها} = \frac{\pm 180(29+1)}{n-m} = \frac{\pm 180(29+1)}{3-0} = \pm 70, 110$$

از آنجایی که تفاوت یک قطب بر روی محور حقیقی وجود دارد پس بر روی محور حقیقی هیچ نقطه‌ای شکست نداریم همچنین چون تفاوت یک جفت قطب بر روی صفت وجود دارد هیچ نقطه‌ای شکست در صفت نداریم.

حال مثل بر محور منحنی با محور موازی را مناسب می‌کنیم:

$$F(s) = s^3 + 2s^2 + 2s + \underbrace{(2a)}_k = 0$$

$$s = j\omega \rightarrow -j\omega^3 - 2\omega^2 + 2j\omega + k = 0$$

$$\text{Re} \rightarrow -2\omega^2 + k = 0$$

$$\text{Im} \rightarrow -\omega^3 + 2\omega = 0 \rightarrow \omega(\omega^2 - 2) = 0 \rightarrow \omega = 0, \omega = \sqrt{2}$$

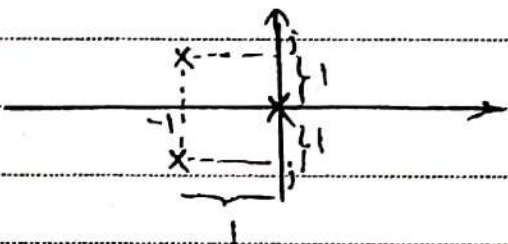
$$-2\omega^2 + k = 0 \xrightarrow{\omega = \sqrt{2}} k = 4$$

$$\xrightarrow{\omega = 0} k = 0 \quad \text{غلط}$$

امکان پذیر نیست که $k=0$ شود زیرا اثر $k=0$ شود تابع تبدیل $\frac{k}{s(s^2+2s+2)}$ صفر می‌شود که امکان پذیر نیست.

$$k=4 \rightarrow 2a=k=4 \rightarrow a=2$$

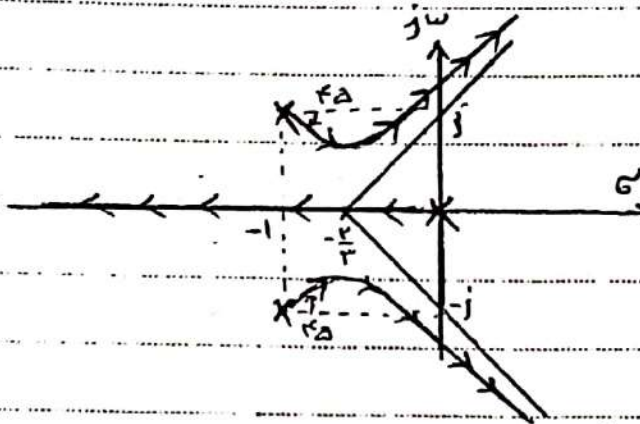
زاوی می خروج از قطب ها به شرح زیر است:



$$\text{For } s=0 \rightarrow -[-\frac{1}{j}(\frac{1}{1}) + \frac{1}{j}(\frac{1}{1})] + [0] + 180 = 180$$

$$\text{For } s=-1+j \rightarrow [90 + \frac{1}{j}(\frac{1}{1}) + 90] + [0] + 180 = -45$$

$$\text{For } s=-1-j \rightarrow [-90 - \frac{1}{j}(\frac{1}{1}) - 90] + [0] + 180 = 45$$

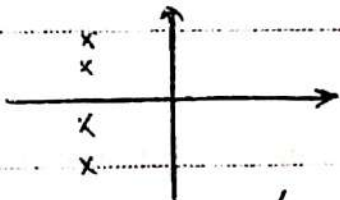


مثال مکان هندسی تابع تبدیل زیر را رسم کنید

$$G(s) = \frac{1}{(s^2 + 2s + 2)(s^2 + 2s + 5)}$$

تعداد صفرها: $n=0$

تعداد قطبها: $m=4 \rightarrow s = -1+j, -1-j, -1+2j, -1-2j$



همان طوری که قبل تر نیز گفتیم بین هر دو قطب یک نقطه‌ای شکست وجود دارد و چون در شکل فوق دو جفت قطب پشت سرهم آمده اند پس دو نقطه‌ای شکست داریم.

$$s_{\text{میان}} = \frac{\sum P_i - \sum Z_i}{n-m} = \frac{-1+j-1-j-1+2j-1-2j}{4-0} = -1$$

$$\text{زاویه‌ی مجانب} = \frac{\pm 180(2q+1)}{n-m} = \frac{\pm 180(2q+1)}{4} = +45, +135$$

برای محاسبه‌ی نقطه‌ی شکست داریم:

$$G(s) = \frac{A(s)}{B(s)} = \frac{1}{(s^2 + 2s + 2)(s^2 + 2s + 5)}$$

Sina Sanedoust

$$A = 1$$

$$B(s) = (s^2 + 2s + 2)(s^2 + 2s + 5)$$

$$A' = 0$$

$$B' = (2s + 2)(s^2 + 2s + 5) + (2s + 2)(s^2 + 2s + 2) \\ = (2s + 2)(2s^2 + 4s + 7) = 4s^3 + 12s^2 + 22s + 14$$

$$\Rightarrow AB' = A'B \Rightarrow 4s^3 + 12s^2 + 22s + 14 = 0$$

$$\text{عقل} \quad \begin{cases} s = -0.29 + 2.2j \\ s = -1 \pm 1.51j \end{cases} \quad \begin{matrix} \times \\ \checkmark \end{matrix}$$

عت

برای محاسبه نقطه شکست می‌توانیم از رابطه زیر نیز استفاده کنیم

$$1 + KG = 0 \Rightarrow K = \frac{-1}{G} = -(s^2 + 2s + 2)(s^2 + 2s + 5)$$

$$\Rightarrow \frac{dK}{ds} = 0 \rightarrow 4s^3 + 12s^2 + 22s + 14 = 0 \quad \begin{matrix} s = -0.29 + 2.2j \\ s = -1 \pm 1.51j \end{matrix}$$

برای اینکه متوجه شویم کدام ریشه s جواب مساله است کافی است ریشه‌های بدست آمده را در معادله $K = \frac{-1}{G}$ قرار دهیم اگر $K > 0$ شود آن ریشه جزء جواب مساله است و اگر $K < 0$ شود جزئی از نقاط شکست نمی‌باشد.

$$\begin{cases} s = -0.29 + 2.2j \rightarrow K = -K \times \\ s = -1 \pm 1.51j \rightarrow K = 2.57 \checkmark \end{cases}$$

زاویه خروج از قطب‌ها:

$$\text{For } s = -1 + j \rightarrow 180 - (90 + 90 + 90) + (0) = -90$$

$$\text{For } s = -1 - j \rightarrow 180 - (90 - 90 - 90) + (0) = 270$$

$$\text{For } s = -1 + 2j \rightarrow 180 - (90 + 90 - 90) + (0) = 90$$

$$\text{For } s = -1 - 2j \rightarrow 180 - (-90 - 90 - 90) + (0) = 90$$

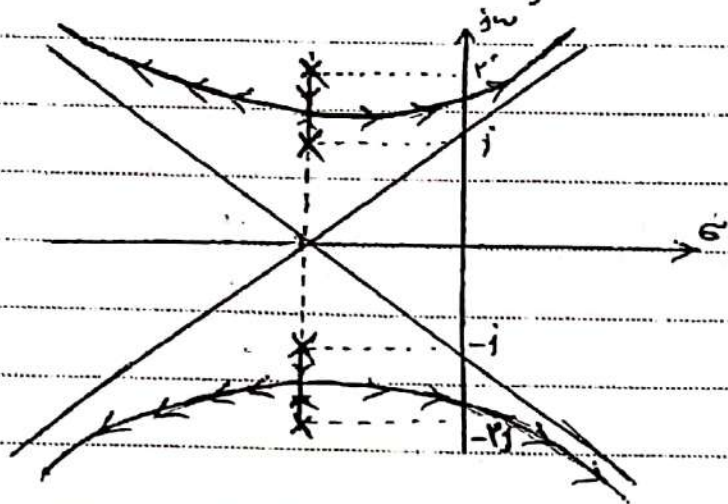
برای محاسبه محل برخورد منحنی با محور موهومی داریم:

$$F(s) = K + (s^2 + 2s + 2)(s^2 + 2s + 5)$$

$$\Rightarrow s^4 + fs^3 + 11s^2 + 14s + 10 + k = 0$$

که با جایی نگرانی $s = j\omega$ در نهایت پاسخ به صورت زیر است:

$$\omega = 1, 1 \Rightarrow s = \pm j\omega = \pm 1, 1j$$



نکته:

همان طوری که از ریاضیات آموختیم:

$$e^{as} = e^{a\omega j} = \cos(a\omega) + j \sin(a\omega)$$

$$|e^{a\omega j}| = \sqrt{(\cos a\omega)^2 + (\sin a\omega)^2} = 1$$

$$\angle e^{a\omega j} = \tan^{-1}\left(\frac{\sin a\omega}{\cos a\omega}\right) = \tan^{-1}(\tan a\omega) = a\omega$$

مثال) حد بهره و حروفاز را برای تابع تبدیل زیر محاسبه کنید

$$G(s) = \frac{e^{-s}}{s+1}$$

برای محاسبه حروفاز

$$G.M = \frac{1}{|G(s)|} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}}} = \sqrt{1+\omega^2} = 1 \Rightarrow \omega = 0$$

$$\phi = \angle G(j\omega) = -\omega - \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{1}\right) \Big|_{\omega=0} = 0 - 0 = 0$$

$$P.M = 180 + \phi = 180 + 0 = 180$$

Sina Sanedoust

برای مطابقتی درجه ۰:

$$\phi_m = 0 \rightarrow \phi + 180 = 0 \rightarrow \phi = -180 = -\pi$$

$$\phi = \angle G(j\omega) = -\omega\omega - \tan^{-1}\omega = -\pi$$

بایستی بر حسب اریان
نوشته شود

در این حالت برای بدست آوردن ω بایستی از روش سعی و خطا استفاده نماییم
یعنی کاغذی است یک ω حدس بزنیم و در رابطه $\omega\omega - \tan^{-1}\omega = -\pi$ قرار
دهیم به طوری که غور بدست آمده به $\pi = 3.14$ نزدیک باشد در نتیجه این
 ω جواب مورد نظر خواهد بود.

$$A = -\omega\omega - \tan^{-1}\omega$$

$$\omega = \frac{\pi}{58} \rightarrow A = -0.27 - 3.1 = -3.37 \quad X$$

$$\omega = \frac{\pi}{59} \rightarrow A = -0.24 - 3.047 = -3.3 \quad X$$

$$\omega = \frac{\pi}{42} \rightarrow A = -0.252 - 2.91 = -3.162 \quad X$$

$$\omega = \frac{\pi}{42} \rightarrow A = -0.249 - 2.851 = -3.1 \quad X$$

جواب بین این
دو است

$$\omega = \frac{\pi}{42.4} \rightarrow A = -0.252 - 2.886 = -3.138 \approx -3.14$$

در نتیجه فرکانس قطع فاز برابر است با:

$$\omega = \frac{\pi}{42.4} = 0.05$$

$$G.M = \frac{1}{|G|} = \sqrt{1 + \omega^2} \big|_{\omega=0.05} \approx 1$$

مثال) نمودار قطبی (نایکویست) تابع تبدیل زیر را رسم کنید

$$G(s) = \frac{e^{-sL}}{1+s}$$

$$s = j\omega \Rightarrow G(j\omega) = \frac{e^{-j\omega L}}{1+j\omega}$$

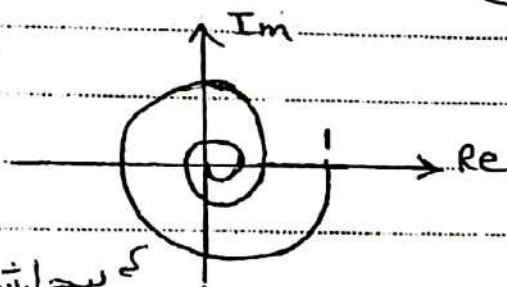
$$|G(j\omega)| \neq G(j\omega)$$

$$(1 \neq -\omega L) \times \left(\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2 T^2}} \neq -tg^{-1} \omega T \right) \begin{cases} |G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2 T^2}} \\ \neq G(j\omega) = -\omega L - tg^{-1} \omega T \end{cases}$$

$$\omega \rightarrow 0 \Rightarrow (1 \neq 0)(1 \neq 0) = 1 \neq 0$$

$$\omega \rightarrow \infty \Rightarrow (1 \neq \infty)(0 \neq -90) = 0 \neq -\infty$$

رامنه به طور کلیت یافت از یک به سمت صفر کاهش می یابد و فاز نیز به طور کلیت یافت و بدون کران کاهش می یابد، پس نمودار قطب این تابع تبدیل یک مارپیچ به شکل زیر است که به چپین مارپیچی، پیچ ارشمیدس گویند.



که پیچ ارشمیدس



«خدا یا چنان کن سرانجام کار
توفیقشور باشی و ما رستگار»

«با آرزوی موفقیت روزافزون برای یکایک

شما دوستان عزیز»

سینا پناغ دوست

Sina Sanedoust

Subject.

Year. Month. Date. ()

1398

