به نام خرد

دانشگاه گیلان دانشکده مهندسی مکانیک	**کنترل اتوماتیک** **مدرس: علی چائی‌بخش**	**پاسخ‌نامهٔ آزمون میان‌ترم** **اول**

کلید پاسخ‌نامه									
۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
۷	**۵**	**۸**	**۶**	**۹**	**۴**	**۶**	**۲**	**۵**	**۳**

پاسخ سؤال ۱

معادلهٔ بقای جرم مخزن:

$$A\,\dot{h} = q - c\sqrt{h}$$

نقطهٔ کار: در حالت ماندگار $\dot{h}=0$، پس $c\sqrt{\bar{h}} = \bar{q} = 2$ و با $c=1$ داریم $\bar{h} = 4\ \mathrm{m}$.

خطی‌سازی: با بسط تیلور $\sqrt{h}$ حول $\bar{h}$ و تعریف $\delta h = h - \bar{h}$ و $\delta q = q - \bar{q}$:

$$A\,\delta\dot{h} = \delta q - \frac{c}{2\sqrt{\bar{h}}}\,\delta h \implies 2\,\delta\dot{h} = \delta q - 0.25\,\delta h$$

$$\frac{\delta H(s)}{\delta Q(s)} = \frac{1}{2s+0.25} = \frac{4}{8s+1} \implies \tau = \frac{A}{c/(2\sqrt{\bar{h}})} = \frac{2}{0.25} = 8\ \mathrm{s}$$

دام‌های رایج: فراموش‌کردن سطح مقطع A (نتیجهٔ غلط ۴) یا استفاده از خودِ $c\sqrt{h}$ به‌جای مشتق آن.

گزینهٔ صحیح: ۷ (ثانیه $\tau = 8$)

پاسخ سؤال ۲

مدار RLC سری با خروجی روی خازن:

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{1/(Cs)}{R + Ls + 1/(Cs)} = \frac{1/(LC)}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}$$

با جایگذاری $R=3$، $L=1$ و $C=0.25$:

$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{4}{s^2+3s+4} \implies \omega_n = \sqrt{4} = 2, \qquad 2\zeta\omega_n = 3 \;\Rightarrow\; \zeta = \frac{3}{2\times 2} = 0.75$$

بهرهٔ DC برابر یک و سیستم زیرمیرا است.

گزینهٔ صحیح: ۵ ($\zeta = 0.75$ و $\omega_n = 2$)

پاسخ سؤال ۳

معادلهٔ سیستم مکانیکی: $m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = f$. با تعریف سرعت $v = \dot{x}$:

$$m\frac{dv}{dt} + b\,v + k\int v\,dt = f$$

در تشابه نیرو–جریان، نیرو معادل جریان و سرعت معادل ولتاژ است؛ معادلهٔ گرهٔ یک مدار RLC موازی:

$$C\frac{dv}{dt} + \frac{1}{R}v + \frac{1}{L}\int v\,dt = i$$

با مقایسهٔ ضرایب:

$$C \equiv m = 4\ \text{F}, \qquad \frac{1}{R} \equiv b = 0.5 \ \Rightarrow\ R = 2\ \Omega, \qquad \frac{1}{L} \equiv k = 2 \ \Rightarrow\ L = 0.5\ \text{H}$$

توجه: در تشابه نیرو–ولتاژ (مدار سری) نتیجه متفاوت و برابر $L \equiv m$، $R \equiv b$ و $1/C \equiv k$ می‌شد؛ صورت سؤال صراحتاً تشابه نیرو–جریان را خواسته است.

گزینهٔ صحیح: ۸ ($C = 4$، $L = 0.5$، $R = 2$**)**

پاسخ سؤال ۴

معادلات تعادل انرژی دو مخزن (دمای محیط صفر):

$$C_1\dot{\theta}_1 = q - \frac{\theta_1 - \theta_2}{R_1}, \qquad C_2\dot{\theta}_2 = \frac{\theta_1 - \theta_2}{R_1} - \frac{\theta_2}{R_2}$$

با $C_1 = C_2 = R_1 = R_2 = 1$:

$$\dot{\theta}_1 = q - \theta_1 + \theta_2, \qquad \dot{\theta}_2 = \theta_1 - 2\theta_2$$

در حوزهٔ لاپلاس:

$$(s+1)\Theta_1 - \Theta_2 = Q, \qquad -\Theta_1 + (s+2)\Theta_2 = 0 \ \Rightarrow\ \Theta_1 = (s+2)\Theta_2$$

با حذف Θ_2:

$$\big[(s+1)(s+2) - 1\big]\Theta_2 = Q \ \Rightarrow\ \frac{\Theta_2}{Q} = \frac{1}{s^2+3s+1}, \qquad \frac{\Theta_1}{Q} = \frac{s+2}{s^2+3s+1}$$

بررسی: بهرهٔ DC برابر 2 است که با مقاومت حرارتی کل $R_1 + R_2 = 2$ در حالت ماندگار سازگار است.

گزینهٔ صحیح: ۶

پاسخ سؤال ۵

معادلات پیوستگی حجم:

$$A_1\dot{h}_1 = q_0 - \frac{h_1 - h_2}{R_1}, \qquad A_2\dot{h}_2 = \frac{h_1 - h_2}{R_1} - \frac{h_2}{R_2}$$

با $A_1 = A_2 = 1$، $R_1 = 1$ و $R_2 = 2$:

$$\dot{h}_1 = q_0 - h_1 + h_2, \qquad \dot{h}_2 = h_1 - 1.5\,h_2$$

$$(s+1)H_1 - H_2 = Q_0, \qquad H_1 = (s+1.5)H_2$$

$$\big[(s+1)(s+1.5) - 1\big]H_2 = Q_0 \;\Rightarrow\; \frac{H_2}{Q_0} = \frac{1}{s^2 + 2.5s + 0.5}$$

بررسی: بهرهٔ DC برابر $1/0.5 = 2$ است؛ در حالت ماندگار تمام دبی از شیر دوم می‌گذرد، پس $\bar{h}_2 = R_2\,\bar{q}_0 = 2\bar{q}_0$.

گزینهٔ صحیح: ۹

پاسخ سؤال ۶

با $L_a \simeq 0$ جریان آرمیچر برابر است با $i_a = (v - K_b\omega)/R_a$ و معادلهٔ مکانیکی:

$$J\dot{\omega} + b\,\omega = K_t i_a = \frac{K_t}{R_a}(v - K_b\omega) \implies J\dot{\omega} + \Big(b + \frac{K_tK_b}{R_a}\Big)\omega = \frac{K_t}{R_a}v$$

با جایگذاری اعداد: $b + \dfrac{K_tK_b}{R_a} = 0.2 + 0.25 = 0.45$ و $\dfrac{K_t}{R_a} = 0.5$:

$$\frac{\Omega(s)}{V(s)} = \frac{0.5}{0.1s + 0.45} = \frac{1.111}{0.2222\,s + 1}$$

$$\tau = \frac{J}{b + K_tK_b/R_a} = \frac{0.1}{0.45} = 0.222\ \text{s}, \qquad K = \frac{K_t/R_a}{b + K_tK_b/R_a} = \frac{0.5}{0.45} = 1.111$$

دام رایج: نادیده‌گرفتن اثر نیروی ضدمحرکه K_b که به $\tau = J/b = 0.5$ و $K = 2.5$ می‌انجامد.

گزینهٔ صحیح: ۴

پاسخ سؤال ۷

با $n = N_1/N_2 = 1/5$ رابطهٔ سرعت‌ها $\omega_2 = n\,\omega_1$ است. اینرسی و اصطکاک شفت دوم با ضریب n^2 به شفت اول منتقل می‌شوند:

$$J_{eq} = J_1 + n^2J_2 = 2 + \tfrac{1}{25}\times 50 = 4, \qquad b_{eq} = b_1 + n^2b_2 = 0.5 + \tfrac{1}{25}\times 25 = 1.5$$

$$J_{eq}\dot{\omega}_1 + b_{eq}\omega_1 = T \implies \frac{\Omega_1(s)}{T(s)} = \frac{1}{4s + 1.5}, \qquad \tau = \frac{J_{eq}}{b_{eq}} = \frac{4}{1.5} = 2.67\ \text{s}$$

دام‌های رایج: صرف‌نظر از انتقال بار ($\tau = J_1/b_1 = 4$) یا استفاده از ضریب n به‌جای n^2 ($\tau = 12/5.5 = 2.18$).

گزینهٔ صحیح: ۶ (ثانیه $\tau \simeq 2.67$)

پاسخ سؤال ۸

تعداد متغیرهای حالت برابر تعداد عناصر ذخیره‌کنندهٔ انرژی مستقل است.

در این مدار L_1 و L_2 سری‌اند و جریان یکسانی دارند؛ بنابراین i_{L_1} و i_{L_2} مستقل نیستند و تنها یک متغیر حالت از آن‌ها حاصل می‌شود (معادل یک سلف $L_1 + L_2$). خازن C نیز یک متغیر حالت (v_C) می‌دهد و مقاومت R عنصر ذخیره‌کنندهٔ انرژی نیست.

$$\text{تعداد متغیرهای حالت} = 1\ (\text{سلف معادل}) + 1\ (\text{خازن}) = 2$$

دام رایج: شمردن هر سه عنصر L_1، L_2 و C و رسیدن به پاسخ غلط ۳.

گزینهٔ صحیح: ۲

پاسخ سؤال ۹

با بسط تیلور مرتبهٔ اول حول $(\bar{x}, \bar{y}) = (2, 1)$:

$$z \simeq \bar{z} + \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(\bar{x},\bar{y})} (x - \bar{x}) + \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(\bar{x},\bar{y})} (y - \bar{y})$$

$$\bar{z} = \bar{x}^2\bar{y} = 4, \qquad \left.\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy\right|_{(2,1)} = 4, \qquad \left.\frac{\partial z}{\partial y} = x^2\right|_{(2,1)} = 4$$

$$z \simeq 4 + 4(x-2) + 4(y-1) = 4x + 4y - 8$$

پس $(a, b, c) = (4, 4, -8)$. بررسی: با $x = 2$ و $y = 1$ داریم $\bar{z} = 4 = 8 + 4 - 8$.

گزینهٔ صحیح: ۵

پاسخ سؤال ۱۰

معادلهٔ سیستم دورانی: $J\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + k\theta = T$، یعنی

$$\frac{\Theta(s)}{T(s)} = \frac{1/J}{s^2 + \frac{b}{J}s + \frac{k}{J}} \implies \omega_n = \sqrt{\frac{k}{J}} = \sqrt{\frac{9}{4}} = 1.5, \qquad 2\zeta\omega_n = \frac{b}{J}$$

$$b = 2\zeta\omega_n J = 2 \times 0.5 \times 1.5 \times 4 = 6\ \mathrm{N \cdot m \cdot s/rad}$$

دام رایج: فراموش‌کردن ضرب در J که به $b = 1.5$ می‌انجامد.

گزینهٔ صحیح: ۳